大哉言數系列（二）

幾何作圖新篇

大哉言數系列（二）・幾何作圖新篇

教育局數學教育組

教育局數學教育組編訂
政府物流服務署印

Prepared by the Mathematics Education Section,
the Education Bureau of the HKSAR
Printed by the Government Logistics Department

ISBN 978-988-8581-23-8

ISBN 978-988-8581-23-8

前言

中國科學院院士華羅庚教授曾在他的科普著作《大哉數學之為用》中描述：「宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之變，生物之謎，日用之繁，無處不用數學」。數學的發展歷史悠久，它的應用無遠弗屆。「大哉言數」系列亦是在此背景下衍生的一個全新的「數學百子櫃」子系列，它的主旨是讓更多人欣賞到不同範疇中數學的美和它的應用。我們希望透過這系列的作品，展現前輩們努力不懈取得的成果和累積的經驗，推陳出新，使數學教育繼續發展。

我們希望把前輩們寶貴的知識和經驗分享給所有數學教育工作者及熱愛數學教育的人，從中學習，精錘百煉，更進一步。作為本系列的首部作品，我們非常榮幸能邀請到教育局數學教育組前總課程發展主任李栢良先生分享他的幾何作圖知識、心得和經驗，讓讀者對不同的幾何作圖方法與技巧有更深入的認識。

本書冊能夠出版，實有賴各方教育工作者的共同努力。在此，謹向撰寫文章的李栢良先生以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：
九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局數學教育組
總課程發展主任（數學）收
（傳真：3426 9265　　電郵：ccdoma@edb.gov.hk）

教育局課程發展處
數學教育組

幾何作圖新篇—楔子

李栢良

念中學時，筆者亦非常喜歡做幾何作圖的題目，覺得作圖題非常具挑戰性，在不能作圖時，往往苦思之後，會靈機一觸似的，找到絕妙的一步，所得的喜悅是證明題不能得到的。作圖題雖則帶給我喜悅，亦帶給很多同學的失落。作圖題的特點是題目看似簡單，但作圖並不容易。是以有學者指「尺規作圖問題絕不是初等愛好者的袖珍玩具」；這說話有兩個意思，一、幾何作圖問題涉及的並不袖珍，是非常之廣；二、幾何作圖問題並不是想像中的容易。事實上，「幾何作圖」吸引了很多數學家，但亦令無數數學家競折腰。

傳統的幾何作圖限制只能用沒有刻度的直尺和圓規，按「作圖公法」，經有限次步驟完成的作圖，一般簡稱「尺規作圖」。歐幾里得(Euclid)在《原本》第一卷首三條「公設」，一般稱之為「作圖公法」(Postulate of Construction)，指出尺規作圖可以：

1) 將任何兩點連一直線；
2) 將直線可任意延長；
3) 以任何點為中心，任何長為半徑作圓。

尺規作圖，可歸納為以有限步在平面上進行以下動作：

a) 任取一點；
b) 任意截取一定長距離；
c) 任意作一直線；
d) 過一點，作一直線；
e) 過兩點，作一直線；
f) 以一點為圓心作圓；
g) 作兩直線交點；
h) 若一圓與一直線相交，作交點；
i) 若兩圓相交，作交點；

若給定單位長度，長度為 a、b、c 的線段（其中 $a>b$），按「作圖公法」和中學學到的若干幾何定理，可以作得以下長度的線段：

1) $a+b$
2) $a-b$
3) ma，其中 m 為正整數
4) $\dfrac{a}{m}$，其中 m 為正整數
5) $\dfrac{ab}{c}$
6) $\sqrt{ab}$
7) $\sqrt{a^2+b^2}$
8) $\sqrt{a^2-b^2}$

二千多年前，已經有作圖題的論述，如用尺規作一個 n 邊的正多邊形，古代的數學家很早已知道如何作出 3、4、5、6 邊的正多邊形，惟獨總找不到作正 7 邊形的方法。

傳說於公元前 429 年，希臘提洛島(Delos)發生瘟疫，死亡眾多，近四分之一的人因瘟疫致死。是以，島民去神廟向阿波羅（Apollo）神祈求，阿波羅神諭「要遏止瘟疫，得將神殿內的祭壇加大一倍」，惟如何可以將立方的祭壇加大一倍？據說，當時的島民，將祭壇的長、闊、高都加大一倍；之後，瘟疫尚未能遏止，回想才發現新祭壇的體積實為原體積的八倍，未能按神諭辦事，島民遂研究如何將祭壇加大一倍，苦思不解下，島民惟有到雅典去求教當地的學者柏拉圖。這故事講述的就是「幾何作圖三大難題」的「倍立方」。

古典希臘幾何學中，有所謂「三大難題」:「化圓為方」、「三等分角」、和「倍立方」或稱「立方倍積」。即以有限步的尺規作圖，求作一正方形，使其面積與一給定圓面積相等、三等分任意給定的角、和作一個立體使其體積為給定立體的兩倍。

二千多年後，隨著笛卡兒（R.Decartes, 1596 – 1650）創建解析幾

何， 許多傳統的幾何問題，皆可轉化為代數問題來研究。1837 年，P.L. Wantzel（1814 – 1848）給出三等分任意角及倍立方不可能用尺規作圖的證明。1882 年，C.L.F. Lindermann（1852 – 1939）證明了π為一「超越數」，不可能以尺規化圓為方。自此，三大問題被徹底解決。1895 年，C. Felix Klein（1849 – 1925）總結了前人的研究，給出三大問題不可能用尺規作圖的簡明證明；至此，「幾何作圖三大難題」遂變成「幾何作圖三大不能問題」。

在證明「不可解」的過程中，一併引發了很多現代數學的探究，如「解 5 次及更高次方程」的問題。

有數學王子之稱的高斯（C.F. Gauss），據說亦是因為成功的找到正十七邊形的作圖方法，肯定了自己的數學才華，才決志往數學方向發展。高斯的遺願亦正好反映尺規作得正十七邊形在他心中的地位，他希望在他墓碑的基石上刻上一個正十七邊形，可惜，石匠發現刻出的正十七邊形與圓差不了多少，後人遂在他墓碑安放了一個十七角星來代替正十七邊形。

作正十七邊形，需將圓心角等分十七份；如下，可以將 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 以根式表示，由此可以得知正十七邊形是「可作的」。

$$\boxed{\begin{aligned}6\cos\frac{2\pi}{17} &= -1+\sqrt{17}+\sqrt{17+4\sqrt{17}}-\sqrt{17-4\sqrt{17}}\\ &\quad +2\sqrt{17+3\sqrt{17}-3\sqrt{17+4\sqrt{17}}-\sqrt{17-4\sqrt{17}}}\end{aligned}}$$

目錄

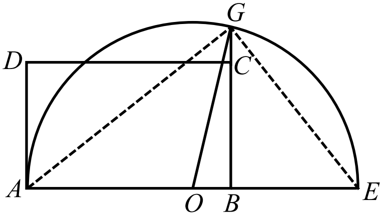
化多邊形為正方形

先前講述「三大難題」的故事，只是傳說而矣。然而，古典希臘幾何學中，亦有不少屬等面積的作圖問題。「化圓為方」是難題，然則化多邊形為方可以嗎？

化矩為方

問題： 如圖，給定長方形$ABCD$，求作與$ABCD$面積相等的正方形。

作圖：



- 延長AB到E，使得$BE = BC$；
- 作AE的中點O；
- 以O為圓心作半圓，並與BC的延線交於G；以BG為邊便可作得所求正方形。

證明：

- 因為 $\angle ABG = 90° = \angle GBE$；$\Delta ABG \sim \Delta GBE$；
- 故$AB : BG = GB : BE$；得$BG^2 = AB \times BE = AB \times BC$

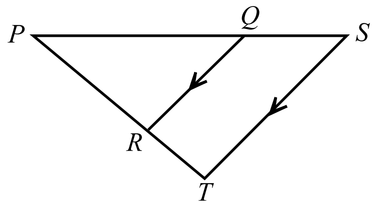
注：

若 $a : x = x : c$，則稱x為a、c的「比例中項」（geometric mean）。BG實為AB、BE的比例中項。

化方為矩

問題： 給定正方形 $ABCD$，求作其中一邊長為 PQ 且與 $ABCD$ 面積相等的矩形。

作圖：



- 如圖，作一任意三角形 ΔPQR，其中 $PR = AB$；
- 延長 PQ 至 S，使得 $QS = AB = PR$；
- 連 QR，過 S 作 QR 的平行線，使之與 PR 的延線交於 T；
- 以 PQ、RT 為邊的矩形即為求作的矩形。

證明：

因為 $QR // ST$，由一般截線定理，有 $PQ : QS = PR : RT$，

即 $PQ : AB = AB : RT$，$PQ \times RT = AB^2$。

注

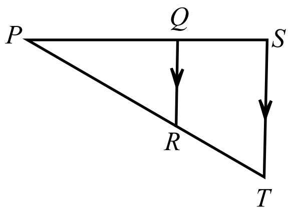
若 $a : b = b : x$，則稱 x 為 a、b 的「第三比例項」(third proportional)。RT 實為 PQ、AB 第三比例項，這作圖法亦屬基本作圖之一。

化矩為矩

問題： 給定矩方形$ABCD$，求作其中一邊長為PQ 且與$ABCD$ 面積相等的矩形。

如前面所述，可先「化矩為方」，作得一個與$ABCD$ 面積相等的正方形；再以「化方為矩」，作得一個等面積的矩形，使得其中的一條邊長PQ。以下的作圖方法更為直接。

作圖：



- 如圖，作一任意三角形ΔPQR，其中$PR = AB$；
- 延長PQ 至 S，使得$QS = AD$；
- 連QR，過S 作QR 的平行線，使之與PR 的延線交於T；
- 以PQ、RT 為邊的矩形即為求作的矩形。

證明：

因為$QR /\!/ ST$，由一般截線定理，有$PQ : QS = PR : RT$，

即$PQ : AD = AB : RT$，$PQ \times RT = AD \times AB$。

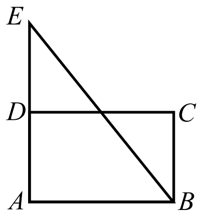
注：

若 $a : b = c : x$，則稱 x 為 a，b，c 的「第四比例項」(fourth proportional)。RT 實為 PQ、AD、AB 又或 PQ、AB、AD 的第四比例項，這作圖法亦屬基本作圖。

化矩形為三角形

問題：給定矩方形$ABCD$，求作一個與$ABCD$ 面積相等的三角形。

作圖：

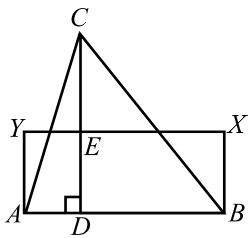


- 如圖，延長AD 至 E，使得$DE = AD$；
- ΔABE 與$ABCD$ 面積相等。(證明從略)

化三角形為矩形

問題：給定三角形ΔABC，求作一個與ΔABC 面積相等的矩形。

作圖：

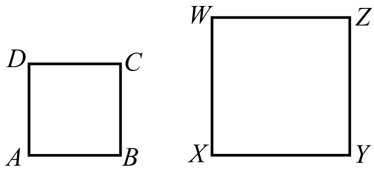


- 如圖，由C 作垂線到AB，命垂足為D；
- 作CD 的中點E，以DE 為高，作矩形$ABXY$；
- $ABXY$ 與ΔABC 面積相等。(證明從略)

至止，可以將三角形、矩形、正方形互化。

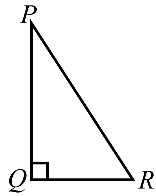
合兩方為方

問題： 如圖，給定兩個正方形 $ABCD$、$XYZW$，求作一個面積等於這兩個正形面積之和的正方形。



作圖：

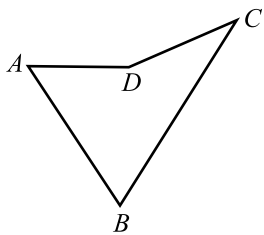
- 作直角三角形 PQR，其中 $\angle PQR = 90°$、$PQ = XY$、$QR = AB$；
- 由勾股定理，PR 上的正方形即為所求正方形。（證明從略）



化四邊形為方

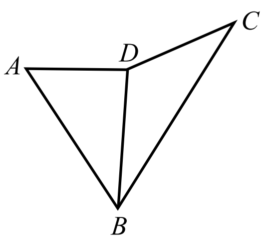
問題：

如圖，給定四邊形 $ABCD$，求作一個與 $ABCD$ 面積相等的正方形。



作圖：

- 如圖，連 BD，得ΔABD、ΔCBD；
- 化這兩個三角形為方得兩正方形，合這兩個正方形便可得一個正方形。

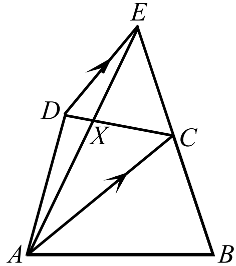


類似地，可以將一個多邊形沿對角線分割成多個三角形、化三角形為方，經合方後，便可得與給定多邊形面積相等的正方形。

化四邊形為三角形

問題：給定凸四邊形$ABCD$，求作一個與$ABCD$面積相等、且以AB為底的三角形。

作圖：



- 如圖，連AC；
- 過D作AC的平行線，使之與BC的延線交於E；
- ΔABE與$ABCD$的面積相等。

證明：

- 因$AC // DE$，ΔACD與ΔACE等底等高，
- 故ΔACD與ΔACE面積相等；
- 各補上ΔABC後，便可知$ABCD$與ΔABE等面積。

命X為AE與CD的交點，從ΔACD與ΔACE各減去ΔACX，便可知ΔDXA與ΔEXC等面積。這結果，經常在稍後的作圖題中使用。

更多的作圖

如前，化多邊形為方，可能是比較煩，但是並不難。前人不期然便想到是否可以化圓為方了。

以尺規化圓為方，現今已證明是不可能的了。同樣，「三等分角」、和「立方倍積」都是不可能用尺規求解。然而，對於「幾何作圖三大不能問題」，至古已有很多數學家，嘗試用「不同方法」求解。

有些人提出，若不能求得準確的解，可以求得「差不多」的近似解嗎？可以「差不多」的三等分任意角？可以「差不多」化圓為方嗎？可以「差不多」立方倍積嗎？於是很多數學家開始發掘一些「近似作圖」的方法。

又或，「幾何作圖三大不能問題」是囿於只能用尺規作圖，若在工具上作少許「手腳」，又或添加「少許」工具輔助作圖，問題是否可以解決？於是，有人想到使用有刻記的直尺，又或自製工具，又或使用特別的曲線等。

然而，數學家是愛探索的，很多人以反方向的方式進行思考，如在尺規上作出更多限制，如以一個已張開了的、但不能再開合、生了銹的圓規作圖，情況會如何，甚麼圖可作？甚麼圖不可作？不用直尺，只用圓規又如何？又或，只用直尺作圖又如何？只用有一對平行邊的直尺作圖又如何？

更有甚者，用摺紙的方式作圖，又或只用等長的火柴枝作圖。

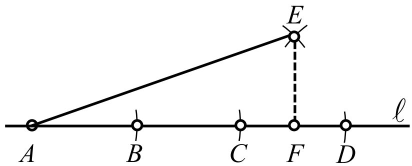
近似作圖

差不多三等分 60°

問題：求作差不多為 20° 的角。

只用尺規來三等分角是三大古老的幾何難題之一，已被證明是不可能只用沒有刻度的直尺及圓規三等分任意角。然而，對於某些特別的角，三等分角仍然是可能的，如 180°、90°、45°等。惟三等分 60° 是不可能的；以下的簡易方法能作出一個差不多為 20°的角。

作圖：



- 作直線 ℓ ，在 ℓ 上選取兩點 A、B；
- 在 AB 的延線上作 C、D，使得 $AB = BC = CD$；
- 分別以 C、D 為圓心，CD 為半徑作弧；命兩弧交於 E；
- $\angle EAD \approx 19°$ 。

驗算：

(a) 設 $AB = BC = CD = 2$；

(b) 命 E 到 ℓ 的垂足為 F；

(c) $CF = DF = 1$，

(d) $EF = \sqrt{3}$

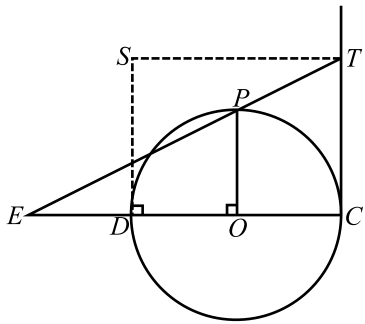
(e) $\tan\angle EAD = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

(f) $\angle EAD \approx 19.106605351°$。

Snell 的「化圓為方」

以發現光學中的「折射定律（Snell's Law）」，為人所熟知的荷蘭物理學家 Willebrord Snell van Roijen 亦加入了「近似作圖」這個行列，發明了「n 等分角」和「化圓為方」的近似作圖方法。

命給定圓的圓心為O，半徑為 r；



- 作直徑CD；延長OD到E，使得$DE = r$；
- 過O作與CD垂直的半徑OP；
- EP 的延線與圓在C點的切線交於T；
- Snell 指出：$CT \approx CP = \dfrac{2\pi r}{4}$ ；

由此，$CTSD$ 的面積 $S_{CTSD} \approx 2r \times \dfrac{2\pi r}{4} = \pi r^2$

- 用前述的「化矩為方」，便可作得與圓面積「差不多」相等的正方形。

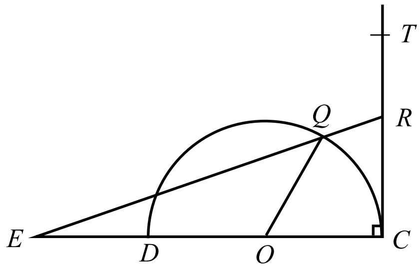
Snell 的方法看似巧妙，但充其量只是得到 π 的近似值 3。

- 因為$\Delta EPO \sim \Delta ETC$，

- 故 $\dfrac{OP}{EO}=\dfrac{TC}{EC}$ ，$CT=\dfrac{3}{2}r$ ，

- 因 $CT\approx\dfrac{\pi r}{2}$ ，$\pi\approx 3$ 。

然而，Snell 將這方法進一步修改，又得出更佳的近似值。



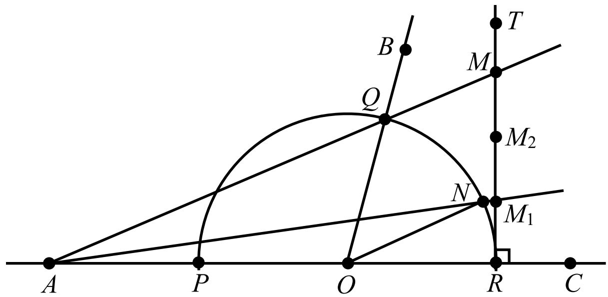
- 如上，圓心為O，半徑為r，$DE=r$；
- 在半圓上取一點Q，且$\angle QOC\le 90^\circ$；
- 延長EQ 使與切線 CT 交於R；
- Snell 指出：$CR\approx CQ$；$\angle QOC$ 愈小，誤差愈小；
- 若 $\angle QOC=60^\circ$， $CQ=\dfrac{1}{6}\times 2\pi r=\dfrac{\pi r}{3}$

  $CR\times 3OC\approx CQ\times 3OC=\pi r^2$；
- 若 $\angle Q_1OC=30^\circ$，同樣，可作得點R_1，則$CR_1\times 6OC$ 差不多等於圓面積，這結果又比$3OC\times CR$ 更為接近；
- 如上，使由更小的角，便可作得更接近圓面積的正方形。

Snell 的「n 等分角」

除了「化圓為方」外，Snell 用類似的方法來「n 等分任意角」。今僅以 $n=3$，「三等分」為例，用尺規近似三等分$\angle BOC$。

如圖，給定$\angle BOC$



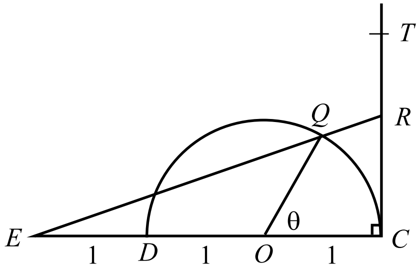
- 以 O 為圓心，取一適當的半徑 r 作弧，使與 CO 的延線、OB、線段 OC 分別交於 P、Q、R；
- 延長 OP 到 A 使得 $OP=PA=r$；
- 如圖，作切線 RT；命 AQ 的延線與 RT 交於 M；
- 三等分 RM 於 M_1、M_2；
- 命 AM_1 與圓交於 N，$\angle NOC \approx \dfrac{1}{3}\angle BOC$；

其實，Snell「n 等分角」的理念與「化圓為方」一樣；

- 如前述，$RQ \approx RM$ 、 $RN \approx RM_1$；
- 因為 $RM=3RM_1$，所以有 $RQ \approx 3RN$；
- 等弧對等圓心角，有 $\angle NOC \approx \dfrac{1}{3}\angle BOC$

Snell「化圓為方」的效果

θ	CR	$CR\times\dfrac{180}{\theta}$
90	1.5	3
60	1.03923	3.11769
30	0.52337	3.14024
15	0.26179	3.14151
7.5	0..13090	3.14159



Snell 的「化圓為方」效果亦不錯，但相信作圖的誤差亦不小。當 $\angle QOC = 7.5°$ 時，基本上是將圓割成 48 份。以單位圓作得的內接正 48 邊形，多邊形的面積為 3.13263；無疑，Snell 的方法能比較快地得到近似值。

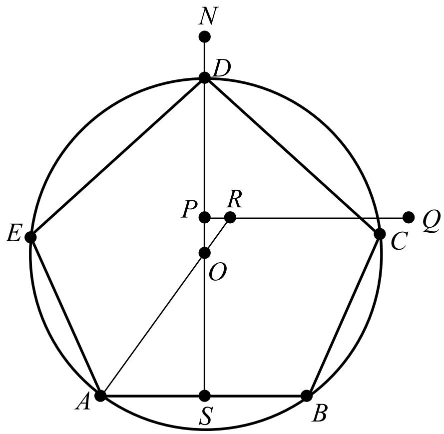
Snell 的選擇

在以上「化圓為方」的示例中，命 $DE = kr$，Snell 使用了 $k = 1$；同樣，在「n 等分角」中，若 $PA = kr$，Snell 亦同樣地使用 $k = 1$；假若選用 k 為其他的正整數，又或是有理分數，會得到更好的效果嗎？有興趣的朋友，不妨一試。

Da Vinci 的近似作圖

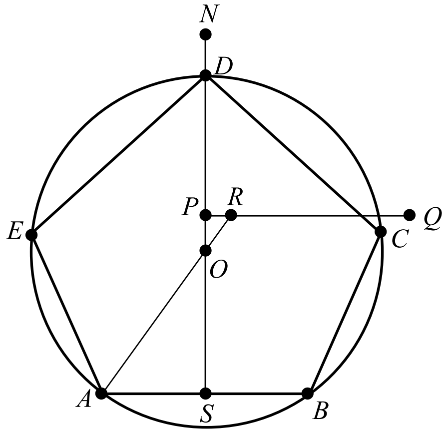
除了創作油畫《蒙娜麗莎》(Mona Lisa)外，意大利文藝復興時期畫家達芬奇(Leonardo da Vinci)亦有一個正五邊形近似作圖。

作圖：



- 作AB，作AB的中點S及中垂線SN；
- 在SN上作P使得$AB = AP$；
- 作PQ使得$AB // PQ$；
- 在PQ上作R使得$PR = \frac{1}{4}AS$；
- 命AR、PS交於O；
- 以O為圓心，OA為半徑作圓，圓與SN交於D；
- 以A為圓心，OA為半徑作弧，與圓交於另一點E；
- 以B為圓心，OB為半徑作圓，與圓交於另一點C；
- $ABCDE$與正五邊形近似。

驗算：



(a)　設 $AB = 2a$，$AP = 2a$，$AS = a$，

(b)　$PR = \dfrac{a}{4}$，$SP = \sqrt{3}a$，

(c)　$\Delta OPR \sim \Delta OSA$，$OP : OS = PR : SA = 1 : 4$，$OS = \dfrac{4}{5}PS = \dfrac{4}{5}\sqrt{3}a$

(d)　$\tan \angle AOS = \dfrac{5}{4\sqrt{3}}$，$\angle AOS = 35.8175°$，$\angle AOB = 71.635°$、

$\angle BOC = \angle AOE = 71.635°$、$\angle EOD = \angle DOC = 72.5474°$

(e) 上述的五隻角與正五邊形的 72°，誤差為 0.365° 或 0.5474°。

Dürer 的近似作圖

比Leonardo da Vinci 晚約廿多年，文藝復興時期的德國版畫大師杜勒（Albrecht Dürer）以他的《憂鬱I》為世人所熟知，尤吸引我的是這版畫上的杜勒多面體（Dürer’s Polyhedron）和一個四階幻方。

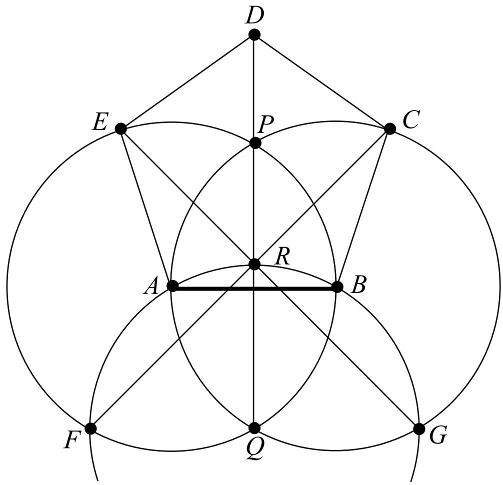
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

這幻方橫行、縱列、對角線上數字的和為34，且任兩個與中心對稱的數字之和都是17。最獨特的是，幻方最下的一列嵌入了 1514 這數字，而杜勒的母親剛巧卒於1514 年，畫作亦完成於1514 年；藝術家是懷念母親而作「憂鬱」？不可而知。

惟獨是，畫中有一位不太像天使的「天使」，亦有謂是一位希臘女神，但縱觀為數約 12 個帶翼的希臘女神中，沒有一個是拿著圓規的，對著一個球體、一杜勒多面體，手中拿著圓規的人物，是為作圖題而「憂鬱」？不可而知了。

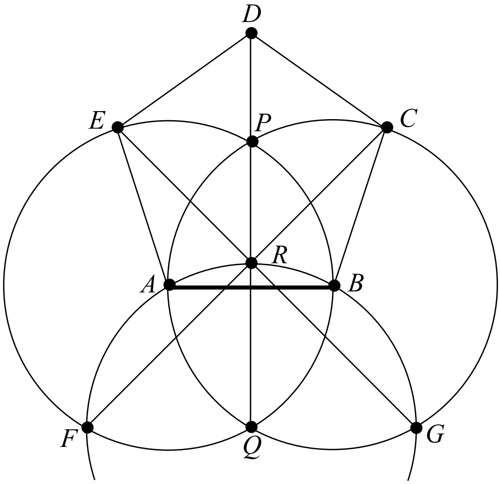
更且，杜勒亦發表了一個正五邊形的近似作圖方法。

作圖：



- 作 AB，以 A、B 為圓心，AB 為半徑作圓，命兩圓交於 P、Q；
- 以 Q 為圓心，QA 為半徑作圓，與圓 A、圓 B 再交於 F、G；
- 圓 Q 與 PQ 交於 R；
- GR 的延線與圓 A 交於 E；
- FR 的延線與圓 B 交於 C；
- 在 QP 的延線上 D 使得 $ED = EA$；
- $ABCDE$ 與正五邊形近似。

驗算：



(a) 設 $AB = a$，$BC = BG = a$，

(b) $\angle FBG = 90°$、$\angle FGB = 60°$，$BF = a\sqrt{3}$，

(c) $\angle BQA = 60°$，$\angle BFA = 30°$，$AR = RB$，$\angle BFR = 15°$，

(d) 由正弦定理，$\dfrac{\sin\angle BCF}{BF} = \dfrac{\sin\angle BFC}{BC}$，

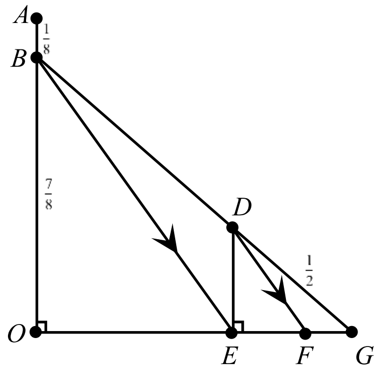
(e) $\angle BCF = 26.6339°$，$\angle CBF = 138.3661°$

(f) 因 $\angle ABF = 30°$，$\angle ABC = \angle EAB = 108.3661°$

(g) 正五邊形的內角為 108°，近似作圖所得結果的誤差為 0.3661°。

近乎準確的化圓為方

作圖：



- 命圓半徑為 OA，設 $OA = 1$，
- 作 $OG \perp OA$，其中 $OG = 1$；
- 在 OA 上作 B，使得 $AB = \frac{1}{8}$；
- 在 BG 上作 D，使得 $DG = \frac{1}{2}$；
- 在 OG 上作 D 的垂足 E；
- 過 D 作 BE 的平行線使與 OG 交於 F；
- 以 $FG + 3OG$、OG 為邊作矩形，「化矩為方」便可得面積非常接近 πOA^2 的正方形。

驗算：

- $BG = \sqrt{1^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{8}$，
- 由相似三角形，$\frac{EG}{DG} = \frac{OG}{BG}$，$EG = \frac{4}{\sqrt{113}}$，
- 同理，$\frac{FG}{EG} = \frac{DG}{BG}$，$FG = \frac{16}{113}$，$FG + 3OG = \frac{355}{113} \approx 3.14159$，
- 以 $FG + 3OG$、OG 為邊的矩形面積差不多等於 π。

注：

- 以上的方法是應用「祖率」$\frac{355}{113} = 3\frac{16}{113}$ 作圖，其結果當然非常接近π值；
- 荷蘭數學家 Jacob de Gelder 於 1849 年發表了上述的近似作圖方法。

使用輔助工具

三大問題之所以無解，關鍵在於尺規的限制。若不限於使用尺規，問題基本上很早已經解決。苦思不得其解下，不少數學家遂考慮到，添加少許輔助工具作圖。

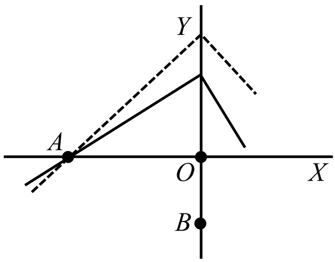
- 阿基米德（Archimedes,約 287 BC – 212 BC）在他的《引理集》（Book of lemmas）記載了三等分任意角的方法。
- 希波克拉底（Hippocrates of Chios,約 470 BC – 410 BC）以兩個三角尺作得 a 與 $2a$ 的等比中項，從而解決了倍立方問題。
- 達芬奇（Leonardo da Vinci, 1452 – 1519）創設了以圓柱來解決化圓為方的方法。

用兩把角尺「立方倍積」

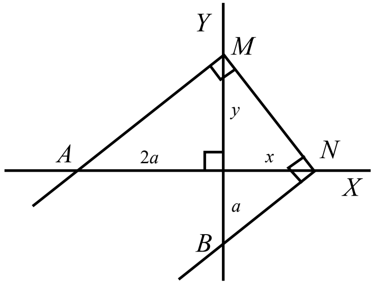
使用輔助工具作圖，不一定需要使用很複雜的工具，用兩張角尺，又或曲尺便可用來「立方倍積」。曲尺是木工或金工常用工具，有一條長邊、一條短邊的直角尺。要是沒有曲尺，亦可使用學生用的角尺。

畢達哥拉斯學派的希波克拉底早已知道可以先作得 a 與 $2a$ 之間的兩個等比中項，從而解決倍立方問題。由 $a:x=x:y$，有 $x^2=ay$；再由 $x:y=y:2a$，有$y^2=2ax$，由此可得 $x^4=a^2y^2=2a^3x$，即$x^3=2a^3$。

- 如圖，作 $BY\perp AX$，交點為 O，其中 $OB = a$、$OA = 2a$；
- 放上一把角尺，使得 A 在角尺的一條邊上，「角」在BY 上。



- 同樣，放另一把角尺，使得B 在角尺的一邊上，「角」在 AX 上；
- 適當地調整兩尺的擺放位，使得不經過A、B 的兩邊「重疊」；



- 命其中的一個角落在BY的M，另一角在AX上的N；
- 因為$\Delta BON \sim \Delta NOM \sim \Delta MOA$，
- 故 $a:x=x:y=y:2a$；
- 由此，$y^2=2ax$、$x^2=ay$，得$x^3=2a^3$；
- 以x為邊作立方，其體積為$2a^3$。

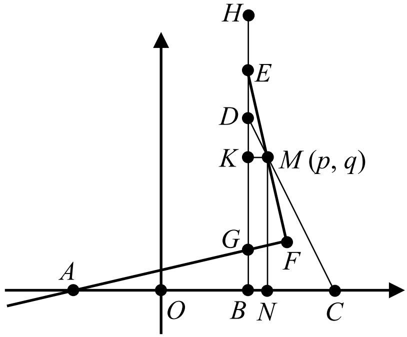
用一把有一個刻記的角尺「立方倍積」

用一把曲尺亦可「立方倍積」，只要曲尺在其中的一條邊上有一個刻記便可。

上圖為一把曲尺，短邊EF，中點M。

作圖：

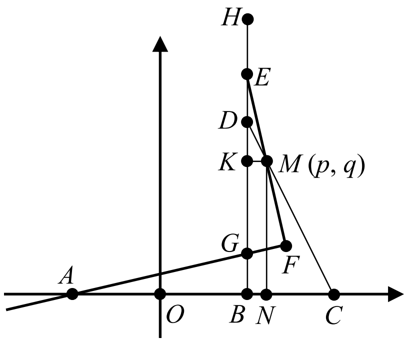
- 命 $EM = MF = 1$；在 x 軸上截取 A、B、C，使得 $AO = OB = BC = 1$;
- 用曲尺作 AC 的垂線 BH；在 BH 上作 D，使 $BD = 2$；



- 保持 A 在曲尺的長邊上、E 在 BH 上；移動 E 直至 M 在 DC 上；
- 命這時的 M 點的坐標為 (p, q)，則有 $q^3 = 2p^3$；
- 命給定的立方邊長 a，作 p、q、a 的第四比例項 z；
- 因 $p : q = a : z$，$z = a \times \dfrac{q}{p}$，$z^3 = 2a^3$，

- 以 z 為邊長的立方，其體積為原立方的兩倍。

證明：$q^3 = 2p^3$

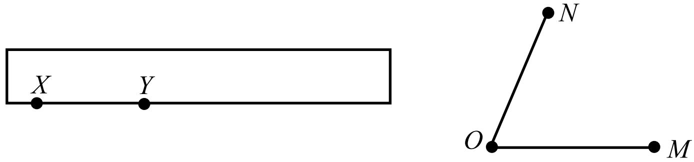


- 命 FA 與 BH 交於 G，M 到 BH、BC 的垂足分別為 K、N；
- 命 $\angle FAC = \theta$，故 $\angle GEF = \theta$；
- $p = 1 + MK = 1 + \sin\theta$；
- $$q = BE - KE = (BG + GE) - \cos\theta = 2\tan\theta + \frac{2}{\cos\theta} - \cos\theta$$
$$= \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{2}{\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos\theta} = \frac{p^2}{\cos\theta}$$
- $$q^2 = \frac{p^4}{1-\sin^2\theta} = \frac{p^3}{1-\sin\theta} = \frac{p^3}{2-(1+\sin\theta)} = \frac{p^3}{1-p}$$
- 因為 $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{NM}{CM}$，故 $2 = \dfrac{q}{2-p}$，
- 因 $q^2 = \dfrac{p^3}{2-p}$，故 $q^3 = 2p^3$。

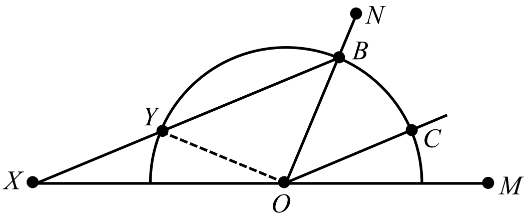
以圓規和有刻記的直尺作圖

以下演示使用圓規和有刻記的直尺三等分任意角，據說這方法為阿基米德（Archimedes）所創。

如圖，給定$\angle MON$ 和一把有兩個刻記 X、Y 的直尺；



- 以 O 為圓心、XY 為半徑作半圓，半圓交ON於 B；
- 過 B，適當地擺放有刻度的直尺作直線，使得X在MO的延線、Y在半圓上；
- 過 O，作 XB 的平行線，並與半圓交於 C；

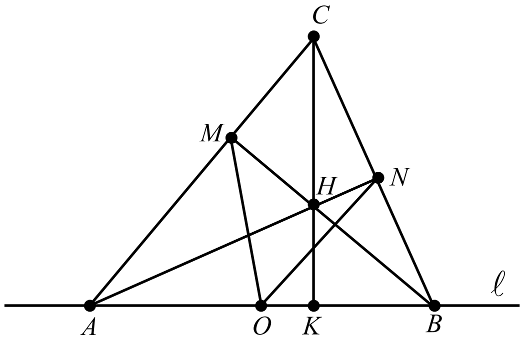


- $XY = OY$，$\angle YXO = \angle YOX$；
- $OY = OB$，$\angle YBO = \angle BYO = \angle YXO + \angle YOX = 2\angle YXO$；
- $\angle BOM = \angle YBO + \angle YXO = 3\angle YXO = 3\angle COM$；
- $\angle COM = \dfrac{1}{3}\angle MON$ 。

以單邊且有兩個刻記的直尺作垂線

問題：給定一直線，只使用有一直邊且在直邊上只有兩個刻記的尺作的一條垂線。

作圖：



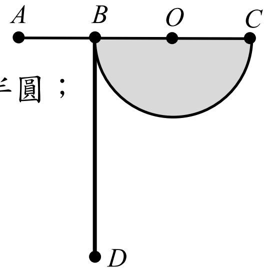
- 命直邊上兩個刻記的距離為 α，故可以作得長 α 的線段；
- 在 ℓ 上取一點 O，並作 AB，使得 $\alpha = AO = OB$；
- 在 ℓ 的同側，作兩點 M、N，使得 $\alpha = OM = ON$；
- 命 AM、BN 的延線交於 C，AN、BM 交於 H；
- 命 CH 的延線與 AB 交於 K；CK 即為 的一條垂線。

證明：

- 因為 $OA = OB = OM = ON = \alpha$，$M$、$N$ 在以 O 為圓心、AB 為直徑的半圓上；
- 所以 $\angle AMB$、$\angle ANB$ 都是半圓上的圓周角，$\angle AMB = \angle ANB = 90°$，
- 由於任意三角形的三條垂線共點，且 $AN \perp BC$、$BM \perp AC$，故 H 為 ΔABC 的垂心；
- 同理，$CK \perp AB$。

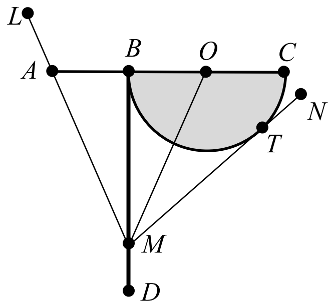
用半圓和一把丁字尺三等分角

用一個半圓及一把丁字尺（亦稱為T尺）亦可自製一把「三等分角尺」。



- 如圖，BC 為以 O 為圓心、直徑為 BC 的半圓；
- ABO 為一直線，其中 $AB = BO = OC$；
- $BD \perp AC$。

作圖：三等分任意角 $\angle LMN$



- 如圖，把「三等分角尺」放在 $\angle LMN$ 上，適當地調整尺的位置使得：

  (a) M 在 BD 上、

  (b) A 在 LM 上、和

  (c) MN 與半圓相切於 T。
- $\angle LMB = \frac{1}{3}\angle LMN$。

證明：

- 由中垂線定理，有 $\angle LMB = \angle BMO$；
- 由圓切線定理，有 $\angle BMO = \angle OMT = \angle OMN$；
- 由此，$\angle LMB = \angle BMO = \angle OMN = \frac{1}{3}\angle LMN$。

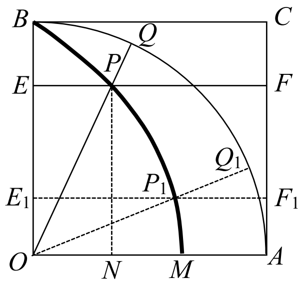
使用輔助曲線：圓積線

「圓積線」（Quadratrix）亦稱為「割圓曲線」，這曲線與「化圓為方」有關，Quadrature 是指「作一個正方形使得其面積與一給定圖形面積相等」，是以曲線稱為 Quadratrix。

據說 Quadratrix 最先由希臘數學家 Hippias（公元前五世紀）發現，是以又稱為 Quadratrix of Hippias。因為 Hippias 又使用這曲線來三等分角，所以曲線亦稱為 Trisectrix of Hippias。

及後，希臘數學家 Dinostratus（公元前三世紀）使用這曲線來化圓為方，是以曲線亦稱為 Quadratrix of Dinostratus。

下圖粗黑的曲線 BPP_1M 即為一條「圓積線」。



- $OACB$ 為正方形，$OA = 1$，AB 是以 O 為圓心的弧；
- 半徑 OQ 由 OB 開始，均速地繞 O 旋轉到 OA；
- 線段 EF 由 BC 開始，均速地往下方平行移動到 OA；
- 移動的半徑與線段同時開始，同時抵達 OA；
- 換言之，$\angle BOQ : \angle BOA = BE : BO$；
- 若半徑轉動到 OQ 時，線段平移到 EF，命 OQ、EF 的交點 P；P 的軌跡即為一條「圓積線」。

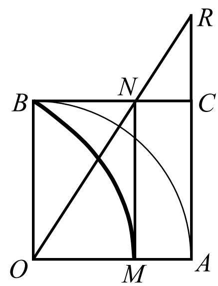
同時，可以得到「圓積線」的方程：

- 設 $OA = OB = 1$；取 OA 為 x 軸，OB 為 y 軸；
- 設 $\angle AOQ = \theta$ ；Q 的坐標為 (x, y)；
- 因 $AQ : AB = OE : OB$ ，即 $\theta : \frac{\pi}{2} = y : 1$ ，或 $\theta = \frac{\pi y}{2}$ ；
- 又 $\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan\frac{\pi y}{2}$ ，即 $x = \frac{y}{\tan\frac{\pi y}{2}}$ ；
- 又因為 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ ，且 $\frac{\tan\frac{\pi y}{2}}{y} = \frac{2}{\pi}\times\frac{\tan\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}$ ；
- $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\tan\frac{\pi y}{2}}{y} = \frac{2}{\pi}\times\lim\limits_{\frac{\pi y}{2}\to 0}\frac{\tan\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}$ ；
- 當半徑與線段貼近 OA 時，$y \to 0$，$x \to \frac{\pi}{2}$ ；
- 若「圓積線」與 OA 交於 M ，則 $OM = \frac{2}{\pi}$ 。

以圓積線化圓為方

- 對於半徑為 r 的圓，若能「作得」圓積線，便可作得 $OM = \dfrac{2r}{\pi}$；
- 若又能由 $\dfrac{2r}{\pi}$ 「作得」$\dfrac{r\pi}{2}$ ；
- 以 $\dfrac{r\pi}{2}$、$2r$ 為邊作矩形，如前「化矩為方」便可得與圓面積相等的正方形。

由 $OM = \dfrac{2r}{\pi}$ 作得 $\dfrac{r\pi}{2}$

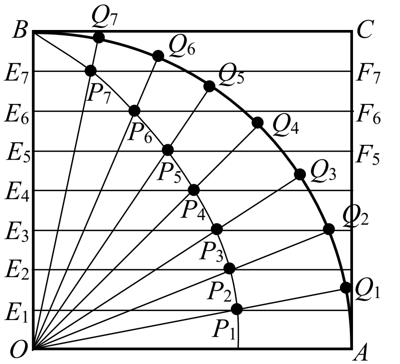


- 設 $OA = r$，如前，得 $OM = \dfrac{2r}{\pi}$ ；
- 作矩形 $OMNB$，命 ON 與 AC 的延線交於 R；
- 由 $\Delta OMN \sim \Delta OAR$，$\dfrac{OM}{MN} = \dfrac{OA}{AR}$
- $OM \times AR = OA \times MN$ ，$\dfrac{2r}{\pi} \times AR = r^2$ ；由此， $AR = \dfrac{r\pi}{2}$ 。

繪製圓積線

使用電腦繪製圓積線不難；但是，在沒有電腦的年代，作得圓積線非常困難。其後，有數學家發明了一個繪圖的方法來描劃圓積線。

因為二等分角及二等分線段較為容易，今僅以 8 點作示例，近似地作出曲線；若要獲得更近似的圓積線，可作更多的點，如 16 點、32 點、⋯ 等等。



(1) 作正方形 $OACB$，其中 $OA = 1$；

(2) 以 O 為圓心，作 AB，八等分 AB 於 Q_1、Q_2、⋯、Q_7；

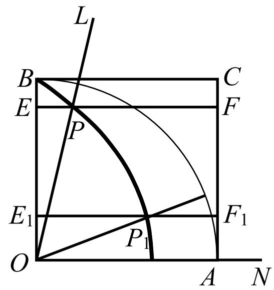
(3) 八等分直線 OB 於 E_1、E_2、⋯、E_7；

(4) 分別過 E_1、E_2、⋯、E_7 作 OA 的平行線並與 AC 交於 F_1、F_2、⋯、F_7；

(5) E_1F_1、E_2F_2、⋯、E_7F_7 分別與 OQ_1、OQ_2、⋯、OQ_7 交於 P_1、P_2、⋯、P_7；

(6) 順滑地連接 B、P_7、P_6、⋯、P_1 即可得出一條近似的「圓積線」。

以圓積線 *n* 等分角



- 如圖，給定 $\angle LON$；
- 將 ON 放在 OA 上；命 OL 與圓積線交於 P；
- 過 P 作 OA 的平行線 EF；
- 以三等分 $\angle LON$ 為例，作 E_1，使得 $OE_1 = \frac{1}{3}OE$
- 過 E_1 作 OA 的平行線 E_1F_1，命 E_1F_1 與圓積線交於 P_1；
- $\angle P_1ON = \frac{1}{3}\angle LON$ 。

證明：

- 命 OP 、OP_1 與圓弧交於 Q、Q_1；
- 由圓積線定義，$AQ_1 : AQ = OE_1 : OE = \frac{1}{3}$ ；
- 故 $\angle AOQ_1 = \frac{1}{3}\angle AOQ$ ，即 $\angle P_1ON = \frac{1}{3}\angle LON$ 。

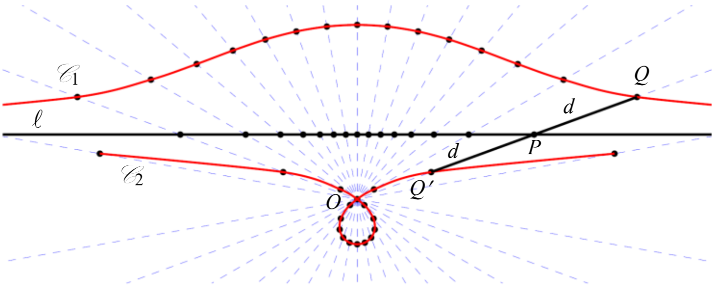
使用曲線輔助：尼科米德蚌線

尼科米德（Nicomedes）約生於公元前 280 年，因他命名的尼科米德蚌線（Conchoid of Nicomedes）是經常談及的一種蚌線，可以用作三等分角及化圓為方。

與圓積線一樣，繪製尼科米德蚌線並不容易，但仍可以較原始的機械工具作得曲線，就這一點而言，是比圓積線略為優勝。

給定一直線 ℓ、一定點 O（如原點）、一定長 d；若 P 為沿 ℓ 走的動點，Q 為 OP 及其延線上的一點，且 $|PQ| = d$，則 Q 的軌跡即為「尼科米德蚌線」。

下圖中的曲線為對於直線 ℓ（$x = a$）的尼科米德蚌線；$\mathscr{C}_1$、$\mathscr{C}_2$ 為蚌線的兩個分支。（注：O 為原點，縱軸為 x-軸）



尼科米德蚌線的方程

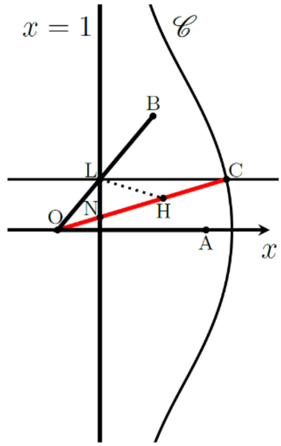
- 極坐標方程：

$$r = a\sec\theta \pm d \text{，其中 } a > 0,\ d > 0,\ -90^\circ < \theta < 90^\circ$$

- 參數方程：$\begin{cases} x = r\cos\theta = a + d\cos\theta \\ y = r\sin\theta = a\tan\theta + d\sin\theta \end{cases}$

三等分一任任意角

現以尼科米德蚌線三等分任意角 $\angle BOA$：



- 設 O 為原點；
- 將 OA 放在 x-軸上；
- 命 OB 交 $x=1$ 於 L；
- 取 $d=2\times OL$，作尼科米德蚌線
  $$\mathscr{C}: r=\sec\theta+d\ ；$$
- 過 L 作 x-軸的平行線，並與 $\mathscr{C}$ 交於 C；
- 便可得 $\angle COA=\dfrac{1}{3}\angle BOA$，證明如下：
- 命 OC 交 $x=1$ 於 N，NC 的中點 H；因 $\angle CLN=90°$，有 $HC=HL=HN$；
- 顯然，$\angle LCH=\angle COA$，$\angle LHN=2\angle LCH$；
- 由尼科米德蚌線性質，$NC=d=2OL$，故 $HL=OL$，
- $\angle LOH=\angle LHN=2\angle LCH=2\angle COA$
- 由此，$\angle COA=\dfrac{1}{3}\angle BOA$

雖則可以用簡單的工具作得尼科米德曲線，但其最大的缺點在於，每三等分不同的角，會得到一段不同的 OL，並需以新的 d 來作一條曲線三等分該角；但同樣的一條圓積線，可以 n 等分多個不同的角；是以就這一點，圓積線又比尼科米德曲線略勝一回了。

只用「界尺」作圖

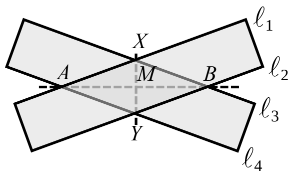
「界尺」為古老的文具，多為木做，有一對平行邊，與今之間尺不同，一般的界尺上沒有刻記；界尺多用來畫線， 亦有界尺為金屬、玉石做，用作紙鎮；兒時，我的手掌感知告訴我：老師用的「膠界尺」是軟中帶硬的。

以下的「雙邊尺」是指只有一對平行邊，沒有刻記的界尺。

只使用雙邊尺：平分線段

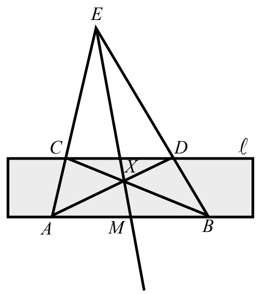
問題：給定兩點A、B，作AB的中點。

方法一



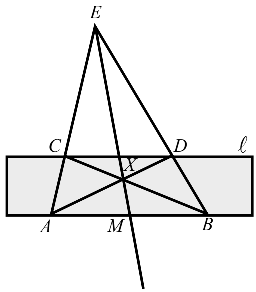
- 如圖，擺放雙邊尺使得A、B各在尺的一邊上，由尺的兩邊得平行線 ℓ_1、ℓ_2；同樣，得兩平行線 ℓ_3、ℓ_4；
- 命 ℓ_1、ℓ_3 交於X；命 ℓ_2、ℓ_4 交於Y；
- 平行四邊形$AXBY$ 對角線的交點M 即為AB 的中點。

方法二



- 如圖，將AB 貼在間尺的一邊，由另一邊得平行線 ℓ；
- 任取一點E，命EA、EB 與 ℓ 交於C、D；
- 命AD、BC 交於X；
- 命EX 的延線與AB 交於M；M 即為所求中點。

證明：



(a) 命 EX 交 ℓ 於 Y ；

(b) 因 $\Delta ECY \sim \Delta EAM$ 、$\Delta EDY \sim \Delta EBM$；

(c) 故 $\dfrac{AM}{CY}=\dfrac{ME}{YE}$ 、 $\dfrac{ME}{YE}=\dfrac{MB}{YD}$ ；由此， $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CY}{YD}$ ；

(d) 又 $\Delta CYX \sim \Delta BMX$、$\Delta YDX \sim \Delta MAX$

因 $\dfrac{MB}{YC}=\dfrac{MX}{YX}$ 、 $\dfrac{AM}{DY}=\dfrac{MX}{YX}$ ，

故 $\dfrac{MB}{YC}=\dfrac{MX}{YX}=\dfrac{AM}{DY}$ ， $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{DY}{YC}$

(e) 由 (c)、(d)， $\dfrac{AM}{MB}\times\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CY}{YD}\times\dfrac{DY}{YC}=1$

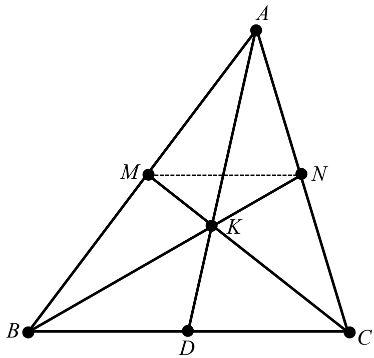
故 $\left(\dfrac{AM}{MB}\right)^2=1$ ，得 $\dfrac{AM}{MB}=1$ ，由此，$AM=MB$。

注：

「方法二」除了用作平分線段外，亦可用來作三角形的中線，在雙邊尺作圖中，經常使用，可以輔助其他作圖，故 亦有稱為「母問題」(Mother Problem)。

「方法二」的系定理

系定理： 給定 BC 的中點 D，A 為 BC 外的一點，若 K 為 AD 上的一點，另 BK 交 AC 與 N ，CK 交 AB 與 M，則 $MN \,//\, BC$。



證明：

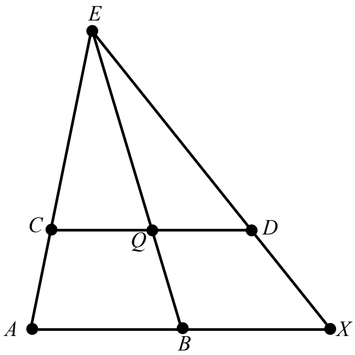
- 由塞瓦定理， $\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CN}{NA}\times\dfrac{AM}{MB}=1$
- 因 BD = DC，有 $\dfrac{MB}{AM}=\dfrac{NC}{AN}$ ，

  故 $\dfrac{AM+MB}{AM}=\dfrac{AN+NC}{AN}$ ，$\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AC}{AN}$
- 由此，$\Delta AMN \sim \Delta ABC$，$\angle AMN = \angle ABC$；
- 故 $MN \,//\, BC$。

只使用雙邊尺：作一線段的兩倍

問題：給定線段AB，求作$2AB$。

作圖：



- 以雙邊作 AB 的平行線 CD；
- 如前，作 CD 的中點 Q；
- 命 AC、BQ 交於 E；
- 延長 ED，使之與 AB 的延線交於 X；$AX = 2 \times AB$。

證明：

(a) 因 $CD \,//\, AB$；

(b) $\Delta ECQ \sim \Delta EAB$，$\dfrac{CQ}{AB} = \dfrac{EQ}{EB}$；

(c) $\Delta EQD \sim \Delta EBX$，$\dfrac{EQ}{EB} = \dfrac{QD}{BX}$；

(d) $CQ = QD$、$\dfrac{CQ}{AB} = \dfrac{EQ}{EB} = \dfrac{QD}{BX}$；

(e) $AB = BX$，故 $AX = 2 \times AB$。

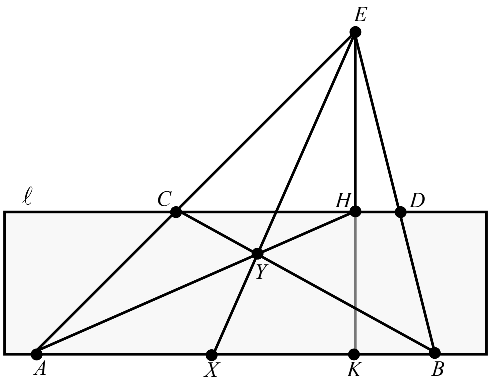
只使用雙邊尺：n 等分線段

先假設已能 k 等分 AB，命 K 為 AB 上的一點，使得 $AK=\dfrac{1}{k}AB$；以下演示由 K 可作 X，使得 $AX=\dfrac{1}{k+1}AB$。

因為可以作得一線段的兩倍，如此便可作得 $k+1$ 等分 AB 的各點。因為已可二等分 AB，根據數學歸納法，故可以 $2+1$、$3+1$、...、n 等分 AB。

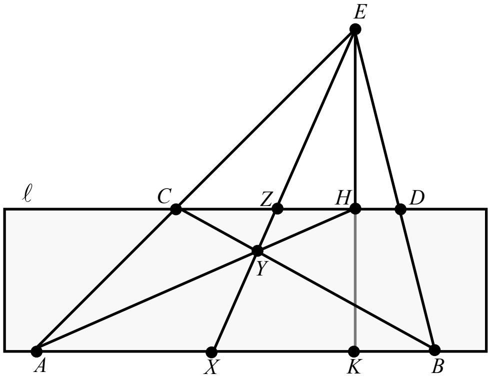
為方便讀圖，下圖的 K 點不按比例劃出，應更靠近 A。

作圖：



- 如圖，將AB 貼在間尺的一邊，由尺的另一邊得平行線 ℓ ；
- 任取一點E，命EA、EK、EB 與 ℓ 交於C、H、D；
- 命AH、BC 交於Y，EY、AB 交於X， $AX=\dfrac{1}{k+1}AB$。

證明： $AX = \dfrac{1}{k+1}AB$



- 命 EX、CD 交於 Z；
- 因 $CD \parallel AB$，$AB = kAK$；$CD = kCH$；
- 因$\Delta ECD \sim \Delta EAB$，$\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{CD}{AB}$
- 因 $\Delta CHY \sim \Delta BAY$，$\dfrac{CH}{BA} = \dfrac{CY}{YB}$ ；

  $\Delta CZY \sim \Delta BXY$，$\dfrac{CZ}{BX} = \dfrac{CY}{YB}$ ；

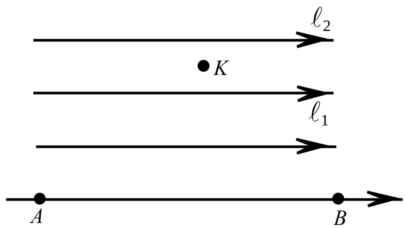
  因此，$\dfrac{CZ}{BX} = \dfrac{CH}{BA}$ ，$CZ \times AB = BX \times CH$；
- 又 $\Delta ECZ \sim \Delta EAX$，$\dfrac{CZ}{AX} = \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{CD}{AB}$ ；
- $CD \times AX = CZ \times AB = BX \times CH$；
- $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{CH}{CD} = \dfrac{1}{k}$
- $kAX = BX$，$AB = AX + BX = (k + 1)AX$；
- $AX = \dfrac{1}{k+1}AB$ 。

只使用雙邊尺：作平行線(1)

固然，用「雙邊尺」可以作得兩條平行線，惟在某些情況，需要兩條平行線之間的距離不是「雙邊尺」的「闊」的整數倍。下例中，ℓ_1、ℓ_2 是以雙邊尺兩邊直接作得的平行線。

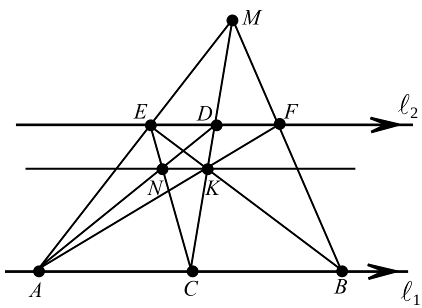
問題：給定直線 AB 及一點 K，過 K 作 AB 的平行線。

作圖：



- 如上，用雙邊尺可作得多條與 AB 平行的平行線，若 K 在其中的一條線上，便作得過 K 且與 AB 的平行的線；否則 K 會落在兩條平行線 ℓ_1 與 ℓ_2 之間。

以下僅演示 AB 為 ℓ_1，K 剛好在 ℓ_1 與 ℓ_2 之間的情況。



- 在 AB 上作 ℓ_1，用雙邊尺作 ℓ_2；
- AK、BK 的延線與 ℓ_2 分別交於 F、E；

- AE、BF 的延線交於 M；
- 作 AB 的中點 C；
- 命 CM 交 EF 於 D，作 CE、AD 的交點 N；
- 過 N、K 的直線即為所求平行線。

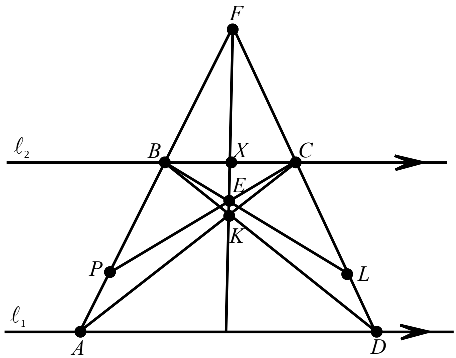
證明：

- 因 $\ell_1 // \ell_2$，$\dfrac{ME}{EA}=\dfrac{MF}{FB}$；
- 因 $AC=CB$，$\dfrac{ME}{EA}\times\dfrac{AC}{CB}\times\dfrac{BF}{FM}=1$
- 由塞瓦定理，MC、AF、BE 共點於 K；
- 因 $\Delta MED \sim \Delta MAC$，$\dfrac{ME}{MA}=\dfrac{ED}{AC}$；
- 又 $\Delta MEF \sim \Delta MAB$，$\dfrac{ME}{MA}=\dfrac{EF}{AB}$；
- 由 $AC=CB$、$\dfrac{ME}{MA}=\dfrac{ED}{AC}=\dfrac{EF}{AB}$，得 $ED=DF$；
- 因 $\Delta EDN \sim \Delta CAN$、$\Delta EDK \sim \Delta BCK$；
- 因 $AC=CB$，$\dfrac{EN}{NC}=\dfrac{DK}{KC}$；
- 由此，$NK // AB$。

只使用雙邊尺：作平行線(2)

問題：給定由「雙邊尺」作得的平行線 ℓ_1、ℓ_2，P 為兩平行線之間的一點，過P 作 ℓ_1 的平行線。

作圖：



- 過 P 作一直線，使之與平行線 ℓ_1 與 ℓ_2 交於 A、B；
- 在 AB 的延線上，取一點 F；
- 過 F 作一直線，使之與平行線 ℓ_1 與 ℓ_2 交於 D、C；
- 命 AC、BD 交於 K；KF、CP 交於 E；BE、DF 交於 L；PL 即為所求平行線。

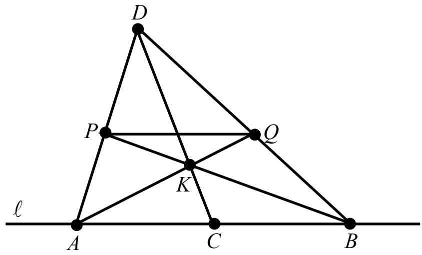
證明：

- 由「只使用雙邊尺平分線段：方法二」一節，FX 為ΔFBC 中線；
- 由「只使用雙邊尺平分線段：方法二系定理」，可以得知 $PL // BC$；
- 故 $PL // AD$。

只使用雙邊尺：作平行線(3)

問題：給定直線 ℓ 及 ℓ 外的一點 P，過 P 作的平行線。

作圖：



- 在 ℓ 上任取兩點 A、B，作 AB 的中點 C；
- 延長 AP 至一點 D；連 DA、DB、DC；
- 命 BP 交 DC 於 K；命 AK 的延線交 DB 於 Q；
- PQ 即為所求平行線。

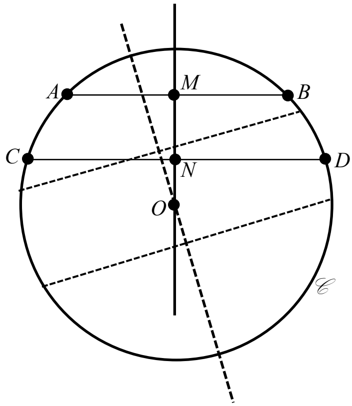
證明：

- 由塞瓦定理，$\dfrac{DP}{PA}\times\dfrac{AC}{CB}\times\dfrac{BQ}{QD}=1$
- 因 $AC = CB$，$\dfrac{DP}{PA}\times\dfrac{QD}{BQ}=1$
- 如前，可以證明 $PQ // \ell$ 。

只使用雙邊尺：作給定圓的圓心

問題：給定圓 C，只使用雙邊尺求作 C 的圓心。

作圖：



- 在圓上任選兩點 A、B 作弦；作與 AB 平行的弦 CD；
- 分別作 AB、CD 的中點 M、N；
- MN 即為 AB 的中垂線；
- 同樣，另作兩條平行的弦及其中垂線；
- 這兩條中垂線的交點 O 即為圓心。

證明從略。

只用圓規作圖

早於 1797 年，意大利數學家 Mascheroni 發表了《圓規幾何》，書中證明了：「所有尺規可解的作圖題，只用圓規也能解」。

於1833 年，瑞士幾何學家 J. Steiner 亦發表了《以直線和定圓的幾何作圖》，書中指出：「只要給定所在平面上一個已給定中心的定圓，所有尺規可解的作圖題，只用直尺亦能解」。

只用圓規作圖

只用圓規，固然不能畫出直線，但若容許不需要實在的畫出一條條直線，只用圓規仍能作出滿足題目要求的點，如：

(a) 作給定圓的圓心

(b) 作一點使與已知點關於已知直線對稱

(c) 作給定兩點所確定的直線上之一點

(d) 作兩直線的交點

(e) 作圓與直線的交點

(f) 作一給定長度的整數倍

(g) 為給定弧作中點

(h) 作給定兩點的中點

(i) n 等分一給定線段

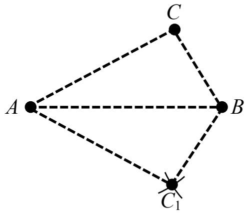
(j) 作第四比例項

(k) 作圓內接正五邊形

只用圓規：作(1)對稱點、(2)平行四邊形

問題(1)：給定A、B及另一點C，作C關於AB對稱的點C_1。

作圖：

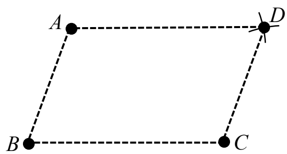


- 如圖，分別以A、B為圓心，AC、BC為半徑作弧，命兩弧的另一交點C_1；
- C_1即為C關於AB的對稱點。

證明從略。

問題(2)：給定A、B、C，作平行四邊形$ABCD$。

作圖：



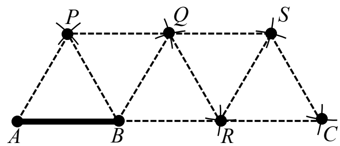
- 如圖，分別以A、C為圓心，BC、BA為半徑作弧，適當地選取兩弧的一交點D；
- $ABCD$即為平行四邊形。

證明從略。

只用圓規：作一給定長度的整數倍

問題：給定直線 AB，作點C，使得$AC = n \times AB$。

作圖：（僅以$n = 3$ 為示例）



- 如圖，以 A、B 為圓心，CD 為半徑作弧，命兩弧的其中一個交點 P；由此，得等邊三角形 ΔABP；
- 如前，作等邊三角形 ΔQBP 、ΔQBR、ΔQSR、ΔCSR；
- C 即為求作的點，$AC = 3 \times AB$。

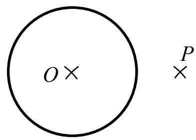
證明：

- ΔABP 、ΔQBP 、ΔQBR、ΔQSR、ΔCSR 皆為等邊三角形；
- 不難證明 $ABRC$ 為一直線；
- $AC = AB + BR + RC = 3AB$。

如此，可延長一給定直線。

只用圓規：作圓外一點的反演點

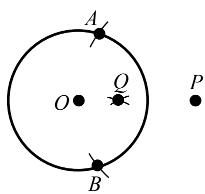
給定反演圓及其反演中心 O，P 為圓外的一點，只用圓規作 P 的反演點。



反演變換（inversion）是幾何學中經常使用的方法，尤其在「單規作圖」（即只用圓規作圖）時，經常使用。

給定以 O 為圓心，r 為半徑的圓，若 P 、Q 與 O 成一直線，且 $OP \times OQ = r^2$，則稱圓為反演圓，O 為反演中心，r 為反演半徑，P、Q 互為反演點（inverse）。

作圖：



- 以 P 為圓心，OP 為半徑作弧，命弧與圓的兩交點為 A、B；
- 分別以 OA、OB 為半徑，A、B 為圓心作弧，命兩弧再交於 Q；Q 即為點 P 的反演點。

證明：

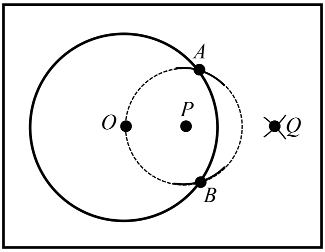
- 由對稱關係，OQP 為一直線；
- $\angle PAO = \angle POA = \angle AQO$；
- $\Delta AOQ \sim \Delta POA$；
- $AO : OQ = PO : OA$，由此 $OP \times OQ = OA^2$。

只用圓規：作圓內一點的反演點

問題： 給定反演圓及其反演中心 O，P 為圓內的一點，只用圓規作 P 的反演點 Q。

為反演圓內的一點作反演點，需考慮 OP 與反演半徑 r，按不同情況作圖。

作圖：1. 當 $OP > \frac{1}{2}r$



- 以 P 為圓心，OP 為半徑作弧，命弧與圓 O 的兩交點為 A、B；（若弧與圓 O 不相交，即可知 $OP < \frac{1}{2}r$）
- 以 OA 為半徑，A、B 為圓心作弧；命兩弧再交於 Q；
- Q 即為點 P 的反演點。

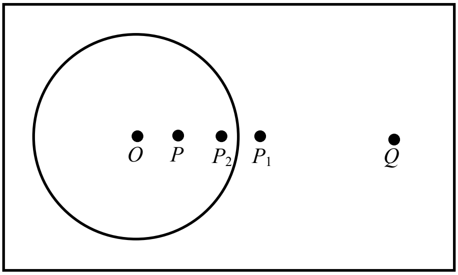
證明：

- 由於對稱關係，不難證明 OQP 成一直線；
- $\angle PAO = \angle POA$、$\angle AOQ = \angle AQO$， $\Delta AOQ \sim \Delta POA$
- $AO : OQ = PO : OA$，所以 $OP \times OQ = OA^2$
- Q 為 P 關於圓 O 的反演點。

作圖：2. 當 $OP = \frac{1}{2}r$

顯然，前述的弧與圓相切，$OQ = 2r$，作圖從略。

作圖：3. 當 $OP < \frac{1}{2}r$



- 在 OP 的延線上作 P_1 使得 $OP_1 = n \times OP$ ，且僅大於 r，今僅以 $n = 3$ 為例；作法可參考「作給定兩點的中點」一節；
- 作圓外的 P_1 關於圓 O 的反演點 P_2；
- 在 OP_2 的延線上作 Q 使得 $OQ = n \times OP_2$；
- Q 即為點 P 關於圓 O 的反演點。

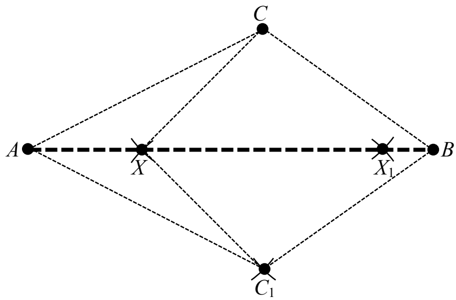
證明：

- $OP_1 = n \times OP$，
- 因 P_2 為 P_1 關於圓 O 的反演點，$OP_2 \times OP_1 = r^2$，
- $OQ = n \times OP_2$，
- $OQ \times OP = n \times OP_2 \times OP = OP_2 \times OP_1 = r^2$，
- Q 為 P 關於圓 O 的反演點。

只用圓規：在給定兩點所確定直線上作一點

問題：只用圓規在給定兩點 A、B 所確定的直線 AB 上作一點。

作圖：



- 任取一點 C（最好 C 不要太貼近 AB）；
- 如圖，作 C 關於 AB 的對稱點 C_1；
- 分別以點 C、C_1 為圓心，（適當的）任意半徑 r 作弧，它們的交點為 X、X_1；
- X、X_1 即為所求點。

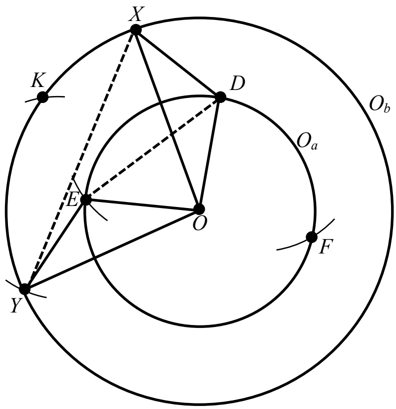
證明：

- CXC_1X_1 為一菱形，XX_1、CC_1 互為中垂線；
- C、C_1 關於 XX_1、AB 對稱；
- AXX_1B 為一直線，X、X_1 為在 AB 上的兩點；若選取不同的 r，即可得不同的點。

只用圓規：作第四比例項

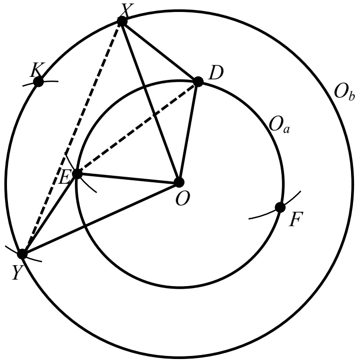
問題：給定線段 a，b，c；求作 a，b，c 的第四比例項。

作圖：



- 如圖，取一點 O 為圓心，分別以 a、b 為半徑作圓 O_a、O_b；
- 在圓 O_a 上任意取一點 D 為圓心，以 c 為半徑作弧，與圓 O_a 交於 E、F；
- 在圓 O_b 上任意取一點 X，以 E 為圓心，XD 為半徑作弧，與圓 O_b 交於 K、Y；
- 考慮 $\angle EOD = \angle YOX$，須捨去 K 點；
- XY 的長度即為 a，b，c 的第四比例項。

證明：



- 因為 $\Delta ODX \cong \Delta OEY$ (SSS)，

  所以，$\angle DOX = \angle EOY$ ，$\angle DOE = \angle XOY$；
- ΔDOE、ΔXOY 為等腰三角形；
- $\Delta DOE \sim \Delta XOY$；
- $OD : OX = DE : XY$，即 $a : b = c : XY$；
- 由此，XY 的長度為 a，b，c 的第四比例項。

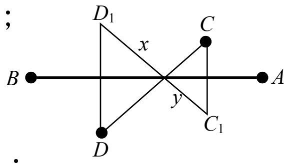
注：

- 假若 $c \geq 2a$，在作圖的第二步，以 D 為圓心，c 為半徑的弧，未必與圓 O_a 相交；
- 假若 $c \geq 2a$，而 $b < 2a$，$\dfrac{bc}{a}$ 亦是 a，c，b 的第四比例項，用同樣的作圖法便可作得；
- 假若 $c \geq 2a$，而 $b \geq 2a$，可容易作得 na，再作 na，b，c 的第四比例項 $y = \dfrac{bc}{na}$，再作 $ny = \dfrac{bc}{a}$，於是 ny 就是 a，b，c 的第四比例項。

只用圓規：作兩直線的交點

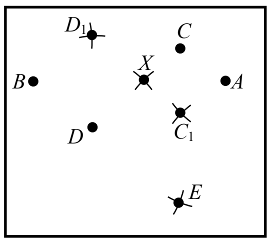
問題：給定四點 A、B、C、D，只用圓規作 AB、CD 的交點 X。

分析：



- C_1、D_1 分別為 C、D 關於 AB 的對稱點；
- 因對稱，C_1D_1 亦交 AB 於 X；
- 命 $D_1X = x$、$XC_1 = y$、$DD_1 = b$、$CC_1 = a$；
- 因 $CC_1 \,//\, D_1D$，$\Delta DXD_1 \sim \Delta CXC_1$， $x = b$
- $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{a+b}{b}$ ，即 $\dfrac{D_1C_1}{x} = \dfrac{CC_1 + DD_1}{DD_1}$ ；
- 故 x 需為 $CC_1 + DD_1$，DD_1，D_1C_1 的第四比例項。

作圖：

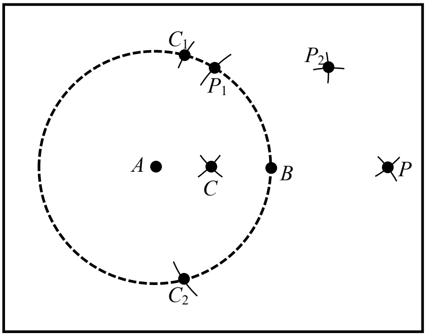


- 作 C、D 關於 AB 的對稱點，作平行四邊形 C_1D_1DE（從略）；
- 因 CC_1E 為一直線，$CE = CC_1 + DD_1$；
- 作 CE、DD_1、CC_1 的第四比例項（如前述）得 x；
- 以 D、D_1 為圓心，x 為半徑作弧，兩弧交於兩點；
- 適當地選取其中的一點為 X，X 即為 AB、CD 的交點。

只用圓規：作給定兩點的中點

問題： 給定A、B，只用圓規作AB 的中點。

作圖：



- 作等邊三角形 ΔABP_1、ΔBP_1P_2、ΔBP_2P ，ABP 為一直線，且 $AP = 2AB$；
- 作 P 關於圓 A 的反演點 C：
  - 以圓心 P 、半徑 AP 作弧，交圓 A 於 C_1、C_2；
  - 以圓心 C_1、C_2，半徑 AB 作弧，兩弧交於 C；
- C 即為 AB 的中點。

證明：

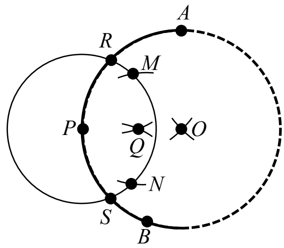
- 不難證明 $AP = 2 \times AB$，ABP 為一直線；
- 因為 C 為 P 關於圓 A 的反演點，ACP 為一直線，且 $AC \times AP = AB^2$；
- $AC \times (2AB) = AB^2$，即 $AC = \frac{1}{2}AB$
- 因 $ACBP$ 為一直線；C 是 AB 的中點。

用類似的方法，亦可以 n 等分一給定線段。

只用圓規：作給定弧的圓心

問題：給定AB，只用圓規作AB 的圓心O。

作圖：



- 在 AB 上任意選取一點P為圓心，適當地選取半徑作圓，好讓圓能交於 AB 上的兩點R、S；
- 以R、S為圓心，RP 為半徑作弧，兩弧再交於Q；
- 作Q關於圓P的反演點O：
  - 以Q為圓心，PQ為半徑作弧，使與圓P交於M、N；
  - 以M、N為圓心，MP為半徑作弧，兩弧再交於O；
- O即為 AB 所在圓的圓心。(另法為作兩弦中垂線及交點)

證明：

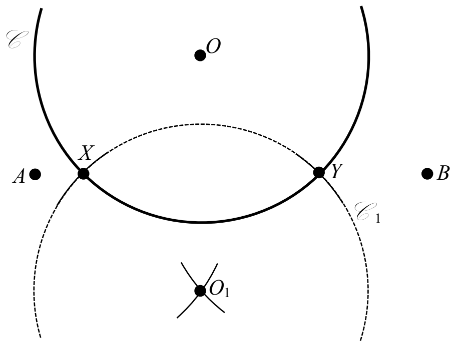
- 因 $PO \times PQ = RP^2$，$\dfrac{PO}{RP} = \dfrac{RP}{PQ}$，$\angle RPO = \angle OPR$；所以，$\Delta RPQ \sim \Delta OPR$；
- 因 $RP = RQ$，所以 $OP = OR$；
- O在PR的中垂線上；PQO亦為RS的中垂線；
- 給定弧所在圓上的兩條弦之中垂線交於O，O為圓心。

只用圓規：作給定弧與直線的交點

問題：給定兩點A、B，圓弧 $\mathscr{C}$ 及圓心O；只用圓規作 $\mathscr{C}$ 與 A、B 所在直線的交點。

(若未有給定圓心，如前亦可作得圓心，從而得整個圓。)

作圖：



- 如圖，作 O 關於 AB 的對稱點 O_1；
- 以 O_1 為圓心，$\mathscr{C}$ 的半徑作弧，
- 命 $\mathscr{C}$、$\mathscr{C}_1$ 的交點 X、Y；
- X、Y 即為直線 AB 與圓 $\mathscr{C}$ 的交點。

證明：

- 因為 O、O_1 關於 AB 對稱，AB 為 OO_1 的中垂線；
- $OX = O_1X$、$OY = O_1Y$，由「中垂線判別定理」，X、Y 在 OO_1 的中垂線上；
- X、Y 在 AB 上；
- 所以，X、Y 是直線 AB 與 $\mathscr{C}$ 的交點。

只用圓規作圖：總結

如前述，以尺規作圖，可歸納為以有限步進行以下動作：

(a) 任取一點；

(b) 任意截取一定長距離；

(c) 任意作一直線；

(d) 過一點，作一直線；

(e) 過兩點，作一直線；

(f) 以一點為圓心作圓；

(g) 作兩直線交點；

(h) 若一圓與一直線相交，作交點；

(i) 若兩圓相交，作交點；

縱觀以上「只用圓規作圖」各節，除實實在在的需要畫一條直線外，尺規能作出所需點的位置，只用圓規也可做到。

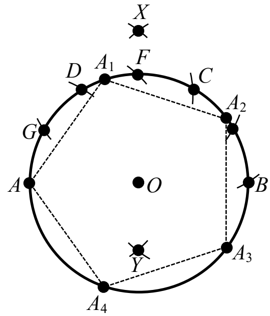
「所有尺規可解的作圖題，只用圓規也能解。」

現以一題經典的作圖題「作圓內接正五邊形」，僅以圓規作圖，作這一篇的結尾。

只用圓規：作圓內接正五邊形

問題：給定一個圓C 及其圓心O，只用圓規求作圓內接正五邊形。

作圖：



(a) 在圓上任選一點 A；以 A 為圓心，AO 為半徑作弧，交圓 O 於 D；

(b) 以 D 為圓心，AO 為半徑作弧，交圓於 C；又以 C 為圓心，AO 為半徑作弧，交圓於 B；

(c) 以 A 為圓心，AC 為半徑作弧，以 B 為圓心，BD 為半徑作弧，兩弧交於 X；

(d) 以 A 為圓心，OX 為半徑作弧，交圓於 F ；

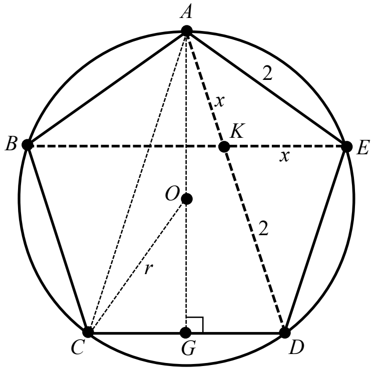
(e) 以 F 為圓心，FO 為半徑作弧，交圓 O 於 G、H；

(f) 以 G、H 為圓心，OX 為半徑作弧，兩弧交於 Y ；

(g) AY 即為正五邊形邊長；以 AY 為半徑，連續作弧得圓上的點 A_1、A_2、A_3、A_4，$AA_1A_2A_3A_4$ 為圓內接正五邊形。

引理：若正五邊形 $ABCDE$ 的外接圓圓心為 O，則

$$OC : OD : CD = 1 : 1 : \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$



- 設正五邊形邊長為 2、$OC = r$、$AK = KE = x$；
- $BK = CD = 2$；
- 因 $\angle KAE = \angle KEA = \angle ABE = 36°$，$\Delta ABE \sim \Delta KAE$；
- $\dfrac{AK}{AE} = \dfrac{AB}{BE}$，$\dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{2+x}$，$x = \sqrt{5}-1$，$AC = \sqrt{5}+1$
- $AC^2 = AG^2 + GC^2$，$\left(\sqrt{5}+1\right)^2 = AG^2 + 1^2$，$AG^2 = 5+2\sqrt{5}$
- $OC^2 = OG^2 + CG^2$，$r^2 = (AG-r)^2 + 1^2$，$r = \dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$
- OC : OD : CD = $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} : \dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} : 2$

$$= 1 : 1 : \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{3+\sqrt{5}} = 1 : 1 : \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

作圖的證明：

- 設給定圓 $\mathscr{C}$ 的半徑為 1；
- 由 (a)、(b)，$AD = DC = CB = 1$、$AB = 2$；AOB 為直徑，$\angle ACB = 90°$；$AC = \sqrt{3}$；
- 由 (c)，OX 為 AB 的中垂線，$OX = \sqrt{2}$；
- 由 (d)，$AF = \sqrt{2}$，$OF \perp AB$，OFX 為一直線；
- 由 (e)，ΔFGO、ΔFHO 為等邊三角形，邊長為 1，$FGOH$ 為一菱形；命 GH、OF 交於 K，$GK =$
- 由 (f)，命 $OY = x$，$GY^2 = GK^2 + KY^2$；$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；
- 故 $AY^2 = 1 + x^2$，$AY = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$
- $OA : OA_1 : AA_1 = 1 : 1 : \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$；
- 由此，ΔOAA_1 與引理的 ΔOCD 相似，
- 因 $\angle COD = 72°$，$\angle AOA_1 = 72°$

同時，$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_4 = \angle A_4OA = 72°$；

- 由此，$AA_1A_2A_3A_4$ 為圓內接正五邊形。

只用界尺和
一個已知圓心的定圓

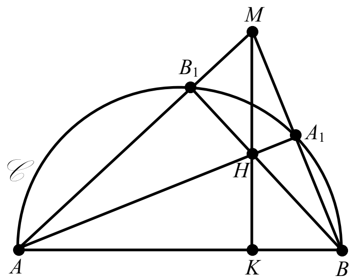
如前述，於 1833 年，瑞士幾何學家 J.Steiner 亦發表了《以直和定圓的幾何作圖》，書中指出：「只要給定所在平面上一個已知定中心的定圓，所有尺規可解的作圖題，只用直尺亦能解」。

因為由界尺已可確定圓的圓心，只用一條木方、一個小銅鑼亦能解所有尺規可解的作圖題。

過定圓外的一點作給定直徑的垂線

問題：AB 為定圓 $\mathscr{C}$ 的直徑，M 為圓外的一點，只用無刻記直邊作 M 至 AB 的垂線。（$\mathscr{C}$ 為固定的給定圓）

作圖：



- 命 MA、MB，與半圓分別交於 B_1、A_1；
- 命 AA_1、BB_1 的交點為 H；
- 延長 MH，使與 AB 交於 K；
- MK 即為所求垂線。

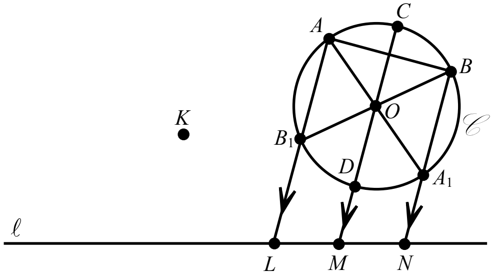
證明：

- 因 $\angle AA_1B$、$\angle AB_1B$ 都是半圓上的圓周角，$\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90°$，
- $AA_1 \perp MB$、$BB_1 \perp MA$，故 H 為 ΔMAB 的垂心；
- 由於任意三角形的三條垂線相交於垂心，$MK \perp AB$。

以給定圓心的定圓過一點作平行線

問題：O 為定圓 $\mathscr{C}$ 的圓心，給定直線 ℓ，K 為 ℓ 外的一點，求作過 K 且與 ℓ 平行的直線。

作圖：



- 在圓上取兩點 A、B；作直徑 AA_1、BB_1；
- 因 $AB_1 \,//\, BA_1$，可以用「只使用雙邊尺作平行線」方法，過 O 作與 AB_1 平行的直徑 CD；
- 延長 AB_1、CD、BA_1，使與 ℓ 分別交於 L、M、N；
- 因為有 LN 的中點 M，再可以用「只使用雙邊尺作平行線」方法，作得過 K 與 ℓ 平行的直線。

證明：

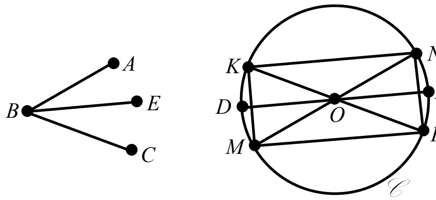
- 可以證明 ABA_1B_1 為一矩形，$AO = OA_1$；
- 因 $AL//BN$，$LM = MN$；
- 過 K 作得與 ℓ 平行的直線之方法及證明從略。

從這一個示例，可以得知，以一個給定圓心的定圓和一把單邊尺，可作得兩條平行線；由此，雙邊尺能作的圖，給定圓心的定圓和一把單邊尺也能作。

只用界尺和給定圓心的定圓作角平分線

問題：O 為定圓 $\mathscr{C}$ 的圓心，給定$\angle ABC$，作$\angle ABC$ 的角平分線。

作圖：



- 以一個給定圓心的定圓和一把單邊尺，可作得與 AB 平行的直徑 MN；
- 亦可作得與 BC 平行的直徑 KF、與 MF 平行的直徑 DP；
- 與及過 B 與 DP 平行的 BE；
- BE 即為所求的角平分線。

證明：

- $\angle NOF = \angle ABC$、$\angle NOP = \angle ABE$；
- 因 $KNFM$ 為矩形，可以證明 $\angle NOP = \frac{1}{2}\angle NOF$ ；
- 故 $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$ 。

火柴棒作圖

不少人嘗試過，在桌上用牙簽或火柴棒可拼出一些有趣的圖案。只以火柴棒來「幾何作圖」亦引來不少數學家的注意，亦成為很多數學愛好者閒來消遣的謎題。

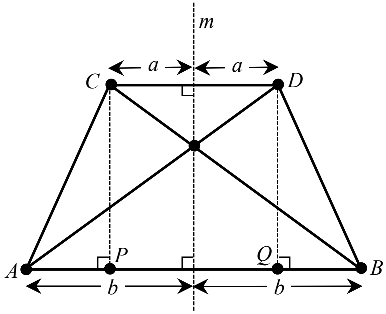
數學家 T.R.Dawson 在1939 年5 月的 The Mathematical Gazette 發表了一篇題為 “Match-Stick” Geometry 的文章，將「火柴棒作圖」整理，原來「火柴棒作圖」與「以直線和給定圓心定圓的幾何作圖」一樣，若有足夠多等長的火柴棒，所有尺規可解的作圖題，只用完整的火柴棒亦能解。

用火柴棒作圖，因火柴棒是立體的，在平面上的同一點不能放上兩根火柴棒，作圖並不完美，亦不能作得一個準確的解。

在往下的討論中，是理想化的情況，火柴棒的擺放發生在平面上；又設定火柴棒的長度為 1。作圖只限於擺放整根火柴棒，不能使用尺規；可以在平面上選取任意的一點，又或是兩根火柴棒的交點。

引理：兩對對稱點的聯線交於對稱軸上

引理： 若B、D 分別為A、C 關於直線 m 的對稱點，則AD、BC 交於對稱軸 m 上的一點E。



證明：

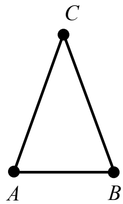
- 設 AD 和 BC 相交於一點 E；
- 若 A、C 在 m 的同側，不失其一般性，設 $AB > CD$；
- 命 C、D 到 AB 的垂足分別為 P、Q；
- 可以證明 $\Delta CPA \cong \Delta DQB$，又 $\Delta CAB \cong \Delta DBA$；
- 由 $\angle DAB = \angle CBA$，ΔEAB 為等腰三角形，$EA = EB$；
- 故 E 在 AB 的中垂線上，即在對稱軸 m 上。
- 若 $AB = CD$，又或 A、C 在 m 的異側，證明亦類似。

以上引理的性質，在火柴棒作圖中，經常用到。

火柴棒作圖：作一個等腰三角形

問題： 給定線段AB，只以擺放火柴棒，作一個等腰三角形。
（其中$AB<2$）

作圖：



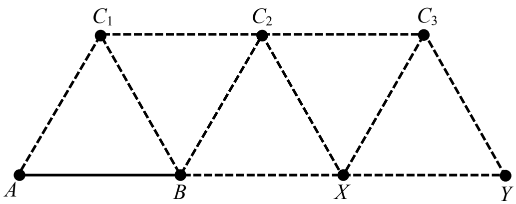
- 在 A、B 上擺放火柴棒 AC、BC；
- ΔACB 即為一個等腰三角形。（證明從略）

若 AB 為一整根火柴棒，ΔACB 即為一個等邊三角形。

火柴棒作圖：作直線

問題： 給定A點，只以擺放火柴棒，過A作長度大於1 的直線。

作圖：



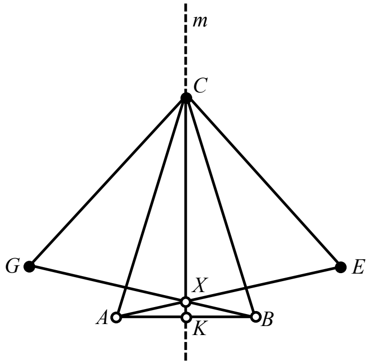
- 作邊長為 1 的等邊三角形 ΔABC_1、ΔBC_1C_2、ΔC_2BX、ΔXC_2C_3、ΔC_3XY；
- AY 即為邊長為 3 的直線。(證明從略)

若 AK 為一邊長小於 1 的線段，將 AB 放在 AK 上，如此便可延長 AK。

火柴棒作圖：作短於火柴棒的線段的中點

問題： 給定一短於火柴棒的線段AB，只以擺放火柴棒，求作 AB 的中點。

作圖：



- 設給定火柴棒的長度均為 1；$AB < 1$；
- 作等腰三角形 ΔACB，其中 $AC = BC = 1$；
- 作等邊三角形 ΔACE、ΔBCG；命 BG、AE 交於 X；
- 由 C 過 X 作長度為 1 的線段，使與 AB 交於 K；
- K 為 AB 中點。

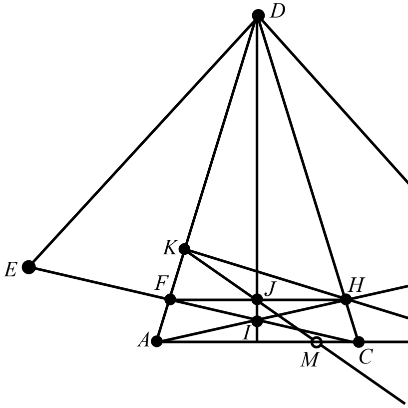
證明：

- 命 AB 的中垂線為 m；顯然，A、B 關於 m 對稱；
- 可以知道 E、G 關於 m 對稱，且 C 在 m 上；
- 由引理，AE、BG 的交點 X 在 m 上；
- 故 CX 為 AB 的中垂線；
- 由此，CX 與 AB 交於中點 K。

火柴棒作圖：作火柴棒中點

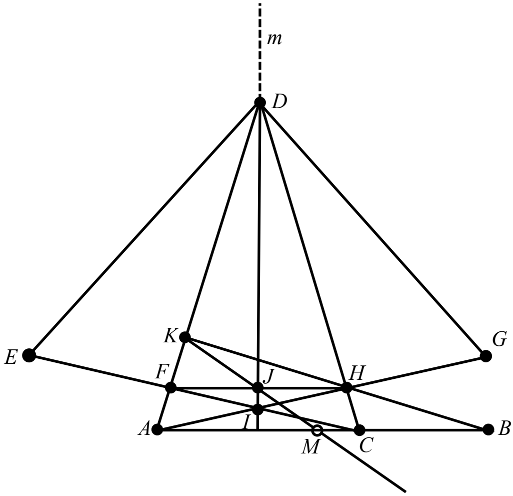
問題：給定整根火柴棒AB，只以擺放火柴棒，求作AB 的中點。

作圖：



- 設給定火柴棒的長度均為 1；
- 在 A、B 之間，選一點 C；
- 作等腰三角形 ΔACD，其中 $AD = CD = 1$；
- 作等邊三角形 ΔADG、ΔDEC；
- 命 CE、AG 交於 I，CE、AD 交於 F ，CD、AG 交於 H，FH、DI 交於 J ；
- 命 BH 的延線交 AD 於 K，KJ 的延線交 AB 於 M ；
- 故 M 為 AB 中點。

證明：

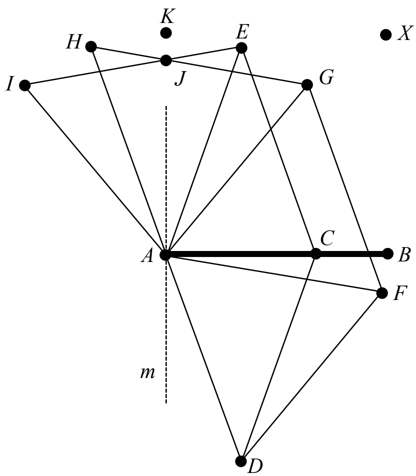


- 命 AC 的中垂線為 m；
- 顯然，A、C，E、G，F 、H 關於 m 對稱；
- $FH \perp m$，$AC \perp m$，$FH // AC$；
- 由引理，EC、AG 的交點 I 在 m 上，且 D 亦在 m 上；
- DI 亦是 FH 的中垂線，J 為 FH 的中點；
- 因 $FH // AC$，$KF : KA = FJ : AM = FH : AB$；
- $FJ : FH = AM : AB = 1 : 2$；
- 故 M 為 AB 的中點。

火柴棒作圖：作正方形

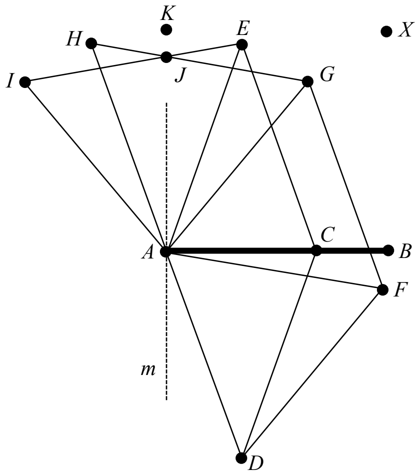
問題：給定火柴棒AB，只以擺放火柴棒，求作正方形 $ABXK$。

作圖：



- 在 A、B 之間，選一點 C；
- 以火柴棒搭等腰三角形 ΔACE、ΔACD，其中 $AE = EC = AD = DC = 1$；
- 以火柴棒搭等邊三角形 ΔADF 、ΔAFG、ΔAGH、ΔAEI；
- 命 HG、IE 交於 J ，過 AJ 放火柴棒 AK；
- 以火柴棒搭 KX、BX，$ABXK$ 即為求作正方形。

證明：



- 可以證明，D、E 關於 AB 對稱，D、H 關於 A 對稱；
- 若 m 為過 A 且與 AB 垂直的一條線（毋須作出），可以證明，E、H 關於 m 對稱；
- 因為可以由 G、E 繞 A 旋轉到 H、I；故 $\angle EAG = \angle HAI$；
- 又 $AG = AI$，可以證明，G、I 關於 m 對稱；
- 由引理，HG、IE 的交點 J 亦在 m 上；
- 過 J 搭火柴棒 AK，$\angle KAB = 90°$；
- 搭火柴棒 KX、BX，$ABXK$ 為菱形；因 $\angle KAB = 90°$，故 $ABXK$ 即為求作正方形。

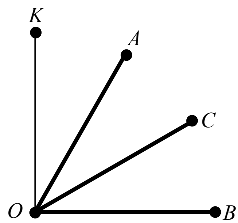
在上述作圖的過程中，已能作得火柴棒 AB 的垂線 AK，故不再另文演示。

火柴棒作圖：作角平分線

(1) 平分 60° 角

問題：給定 $\angle AOB = 60°$，平分 $\angle AOB = 60°$。

作圖：

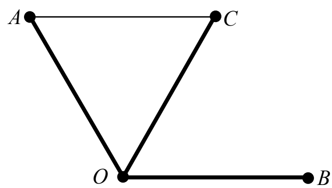


- 作 OB 的垂線 OK，其中 $OB = OK = 1$；
- 搭出等邊三角形 ΔOKC；
- $\angle AOC = 30°$。（證明從略）

(2) 平分 120° 角

問題：給定 $\angle AOB = 120°$，平分 $\angle AOB$。

作圖：

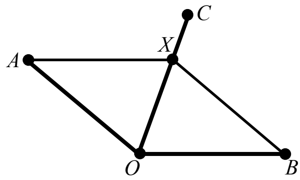


- 作等邊三角形 ΔAOC；
- $\angle AOC = 60°$。（證明從略）

(3) 平分大於120° 的角

問題：給定 $\angle AOB > 120°$，平分 $\angle AOB$。

作圖：

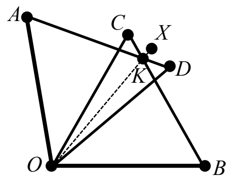


- 作菱形 $AOBX$，$\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB$。（證明從略）

(4) 平分小於120° 的角

問題：給定 $\angle AOB < 120°$，平分 $\angle AOB$。

作圖：



- 作等邊三角形 ΔBOC、ΔAOD；
- AD、BC 交於 K，過 K 的 OX 即為求作的角平分線。

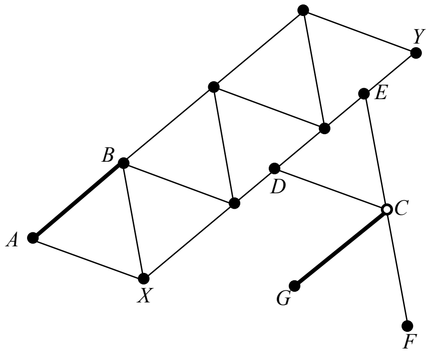
證明：

- 考慮已知 AOB 的角平分線 OX，A、B 關於 OX 對稱；
- 因 $\angle AOX = \angle BOX$，有 $\angle COX = \angle DOX$；
- 因 $OC = OD = 1$，可知 C、D 亦關於 OX 對稱；
- 由引理，AD、BC 的交點 K 在 OX 上；由此，OX 即為求作的角平分線。

火柴棒作圖：過一點作平行線

問題： 給定火柴棒AB，C 為AB 外的一點，過C 求作AB 的平行線。

作圖：



- 如圖，作一連串的等邊三角形，直至得到一條與 AB 平行的 XY，使得 XY 與 C 凡距離少於 1（火柴棒的長度）；
- 以火柴棒搭等腰三角形 ΔCED，其中 $CE = CD$；
- 以火柴棒搭 E 關於 C 的對稱點 F；
- 作 $\angle DCF$ 的角平分線 CG；
- CG 即為求作平分線。

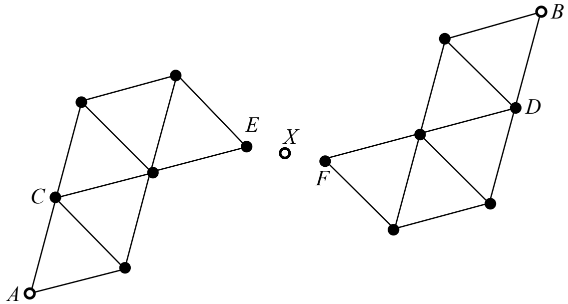
證明：

- 可以證明，CG // ED；
- 因為 DE // AB，故 AB // GC。

火柴棒作圖：作距離大於 1 的兩點的中點

問題：給定兩點A、B，且$AB>1$，求作AB 的中點。

作圖：



- 如圖，以火柴棒AC，以大概為中點的方向作一連串的等邊三角形；
- 過 B 作 AC 的平行火柴棒 DB；
- 以大概為中點為對稱點，反方向的作一連串的等邊三角形；
- 若兩邊三角形的點 E、F 的距離小於 1；
- 作 EF 的中點 X；
- X 即為求作中點。（證明從略）

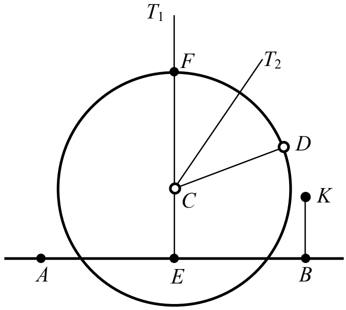
若要作任意兩點 A、B 的連線，可作一連串的中點，對於每相鄰的兩點，若其距離大於 1，便作兩者的中點。由此，便可得一連串在 AB 上的點，每兩點的距離小於 1。這樣便可用火柴棒作得 A、B 的連線。

若只給定四點 A、B、C、D，亦可作得 AB 和 CD 的交點。

火柴棒作圖：作沒有畫出的直線與沒有畫出的圓之交點

問題：只給定圓 $\mathscr{C}$ 的圓心 C 和圓上的一點 D，另給定 A、B，求作圓 $\mathscr{C}$ 與 AB 的交點。

作圖：



圖示的圓，並不能實體的畫出，只是為方便講述用。

(a) 作 BK，使得 $BK \perp AB$；

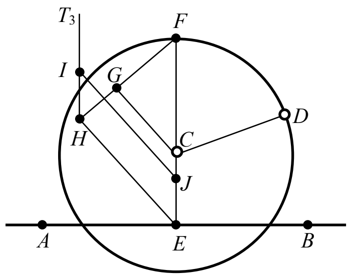
(b) 過 C 作與 BK 的平行線，使之與 AB 交於 E，E 即為 C 到 AB 的垂足；

(c) 延長 EC 到 T_1；

(d) 作 $\angle T_1CD$ 的角平分線 CT_2；

(e) 如 (b)，可作得由 D 到 CT_2 的垂線，垂線與 CT_1 交於 F，因 F 與 D 關於 CT_2 對稱，$CF = CD$，F 在圓上；

(f) 任意作單位長線段 FG；



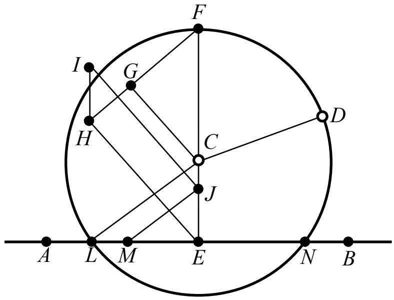
(g) 過 E 作 CG 的平行線，使與 FG 的延線交於 H；

(h) 過 H 作 EC 的平行線 HT_3；

(i) 如 (d)、(e)，在 HT_3 上作 I，使得 $HI = HG$；

(j) 在 CE 上作 J 使得 $IJ \,//\, HE$；

(k) 因 $CE : CF = HG : GF = HI : GF = JE : GF$，因 $CE < CF$（假設 AB 與圓相交），有 $JE < GF = 1$；



(l) 因此，可以在 AB 上搭出 M 使得 $JM = 1$；

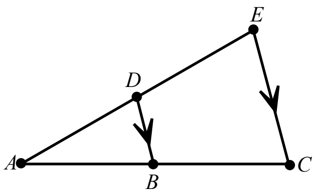
(m) 在 AB 上作 L 使得 $CL // JM$；L 即為 AB 與圓的一個交點；

(n) 在 AB 上作 N 使得 $LE = EN$，N 即為 AB 與圓的另一交點。

證明：

- 由 (k)，$CE : CF = JE : GF$，又 $GF = JM = 1$，故 $JE : GF = JE : JM = CE : CL$；
- $CE : CF = CE : CL$，$CL = CF = CD$，故 L 亦在圓上。

附：給定 AB，作 $2AB$

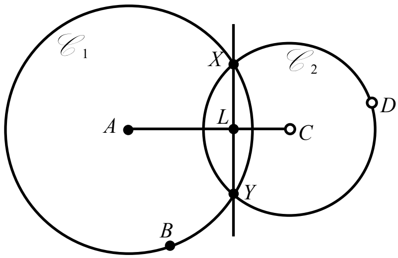


- 作 $AD = 1$，延長 AD 至 E，使得 $AE = 2$；
- 過 E 作 BD 的平行線，與 AB 的延線交於 C，$AC = 2AB$。（證明從略，n 等分 AB 的作圖亦類似）

火柴棒作圖：作沒有畫出的兩個圓之交點

問題：只給定圓 $\mathscr{C}_1$ 的圓心 A 和圓上的一點 B、圓 $\mathscr{C}_2$ 的圓心 C 和圓上的一點 D；求作 $\mathscr{C}_1$ 與 $\mathscr{C}_2$ 的交點。

分析：



(a) 在 AC 上作 B_1，使得 $AB = AB_1$（用前一節作分角線再作對稱點的方法）；又在 AC 上作 D_1，使得 $CD = CD_1$；

(b) 若 D_1 落在 B_1、C 之間，顯示兩圓相距大於兩圓半徑之和，兩圓不相交；

(c) 往下只講述兩圓相交的情況；

(d) 命 $AL = a$、$CL = c$；

(e) 兩圓相交於 X、Y，XY 交 AC 於 L，$XY \perp AC$；

(f) 因 $AX^2 - AL^2 = XL^2 = CX^2 - CL^2$，
可得 $(AL+CL)(AL-CL) = (a+c)(a-c) = AC(AL-CL)$；

(g) 若 K 在 AL 上，且 $LK = CL$；由 (f)，$AC \times AK = (a+c)(a-c)$，
$$AK = \frac{(a+c)(a-c)}{AC}$$；

(h) 在「化矩為矩」一節，已講及只要有直線及平行線，便可得第四比例項，故可作得 AK；

(i) 由 K，可作得 L、AL 的垂線，便可得垂線與圓的交點。

因步驟過於繁複，不在這演示。

只用火柴棒作圖：總結

如前述，以尺規作圖，可歸納為以有限步進行以下動作：

（i） 任取一點；

（ii） 任意截取一定長距離；

（iii） 任意作一直線；

（iv） 過一點，作一直線；

（v） 過兩點，作一直線；

（vi） 以一點為圓心作圓；

（vii）作兩直線交點；

（viii）若一圓與一直線相交，作交點；

（ix） 若兩圓相交，作交點；

縱觀以上「只用火柴棒作圖」各節，除實實在在的畫出一個圓外(第 vi 點)，尺規能作出所需點的位置，只用火柴棒也可做到。

「所有尺規可解的作圖題，只用火柴棒也能解。」

惟火柴棒作圖，只是紙上談作圖。莫說是真的用火柴棒來做，在平面上，手指筆劃的說出每一個步驟，亦非常繁複；更且，多根火柴棒不會如意的平放，其誤差之大，不言而喻。

參考資料

1. 梁宗巨。世界數學通史上冊。遼寧教育出版社，1995。
2. 梁宗巨。數學史典故冊。九章出版社，1995。
3. 王繼光（譯）。只用圓規的幾何作圖。九章出版社、開明出版社，2004。
4. 李文林(譯).數學史概論 A History of Mathematics.高等教育出版社，2002。
5. 劉培杰(編)。世界著名平面幾何經典著作 沉：幾何作圖專題卷(上)。哈爾濱工業大學出版社，2009。
6. 張賢科。古希臘名題與現代數學。科學出版社，2007。
7. 谷超豪。數學詞典。上海辭書出版社，1992。
8. 顧森。思考的樂趣 Matrix 67 數學筆記。人民郵電出版社（P.134）。
9. E.J. Barbeau, M.S. Klamkin, W.O.J. Moser. Five Hundred Mathematical Challenges. The Mathematical Assoication of America, 1995.
10. R. Courant, H. Robbins. What is Mathematics. OUP, 1996.
11. R.A.Simon. Approximate Construction of Regular Polygons: Two Renaissance Artists.

後話

這本小冊子的出版，實有賴於數學教育組的支持，非常感謝李駿宇先生和鄭仕文先生。在一次友好飯聚，鄭仕文先生建議我將過往在網上發佈的網頁選輯成為一本小冊子，與大家分享。我對這建議當然非常高興；稍後再與李駿宇先生商量，就選材方面，他給了我很大的空間。我在網上發佈的網頁，多是我的閱讀報告而矣；我喜歡藏書、購書和看書，看到我能力所及的、覺得美妙的數學，我便有衝動將我的喜悅與眾分享；我的網頁內容，多為古算、幾何、組合數學和一些謎題。原先計劃編寫的內容包括歐幾里得的圖形分割與及劉徽的《海島測望》，寫了一兩個題目之後，發現自己的胃口倒是太大了，眼濶肚窄。編寫時，談到圖形分割，總離不開幾何作圖。但回首一看，早年數學教育組已編印了一本由孔德偉先生編寫、內容非常豐富的《尺規作圖實例、題解和證明》，苦思之下，不如寫一本有少許另類的作圖問題與眾同樂。單規作圖，火柴枝作圖是本人較喜歡的兩篇，因為很久以前，已聽說過只用圓作圖，除實實在在的要畫出直線外，尺規能作出所需點的位置，只用圓規也可做到；奈何坊間的參考資料較少，所以能夠較完整的將整個課題展出，能做到如華羅庚先生所講的「由薄到厚」，非常高興，至於「由厚到薄」這一境界，我不夢想了。而火柴枝作圖這一篇，是在一本書名看似不太嚴格的科普讀物內看到，才又一次證實不可以「以名取書」，絕不會想到它內藏珠玉甚豐。

在這再次感謝數學教育組，尤其是李駿宇先生、鄭仕文先生和程國基先生為文稿提出寶貴的意見，使得本人能為數學教育作出一點貢獻，再次為宣傳數學之美添磚加瓦。亦非常感謝我初中一的數學老師關先生，他帶領我走入美妙的平面幾何世界，更要感謝妻子包攬家政，使我能全力投入工作。自覺錯別字一年比一年多，而數學的理解不足，懇請專家和讀者原諒、不吝賜教。